Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Seien $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $s \in [0, 1/p)$ gilt

$$H_p^s(J, L^p(\Omega)) \cap L^p(J, H_p^s(\Omega)) = H_p^s(J \times \Omega)$$

mit äquivalenten Normen.
Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Betrachten Sie zunächst den Fall $J = \mathbb{R}$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$. Wenden Sie dabei den Satz von Mikhlin auf die Multiplikatoren

$$(1+\tau^2)^{s/2}, \;\; (1+|\xi|^2)^{s/2}, \;\; (1+\tau^2+|\xi|^2)^{s/2}$$

an.

(ii) Nutzen sie danach aus, dass für $s \in [0, 1/p)$ gilt:

$$C_c^\infty(J \times \Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} H_p^s(J \times \Omega), \;\; C_c^\infty(J, C_c^\infty(\Omega)) \overset{d}{\hookrightarrow} H_p^s(J, L^p(\Omega)) \cap L^p(J, H_p^s(\Omega)).$$

Aufgabe 3.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $q = (n+2)/(n+1)$. Weiter besitze der Stokesoperator $A_\sigma : D(A_\sigma) \subset L^q_\sigma(\Omega) \to L^q_\sigma(\Omega)$ mit

$$D(A_\sigma) = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^q_\sigma(\Omega)$$

maximale Regularität auf L^q_σ.
Zeigen Sie, dass für

$$(f, u_0) \in \left(L^2(J, L^2_\sigma(\Omega)) \times L^2_\sigma(\Omega)\right) \cap (L^q(J, L^q_\sigma(\Omega)) \times I_q(A_\sigma))$$

die Folge der Approximationen u_k auch in

$$W^{1,q}(J, L^q_\sigma(\Omega)) \cap L^q(J, D(A_\sigma))$$

schwach konvergiert.
Hinweis: Wir betrachten in dieser Aufgabe den Stokesoperator mit $\mathcal{B} = 0$. Gehen Sie zur Lösung wie folgt vor:

1. Zeigen Sie zunächst eine Abschätzung der Form

$$\|(v \cdot \nabla)u\|_{L^q(L^q)} \leqslant C\left(\|v\|^2_{L^\infty(L^2)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(L^2)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(L^2)}\right)$$

für u, v in der Leray-Hopf-Klasse. Nutzen Sie dazu die Hölder-, Young- und Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung aus.

2. Lösen Sie anschließend unter Ausnutzung der maximalen Regularität von A_σ die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{v} + A_\sigma v &= -(u_{k-1} \cdot \nabla) u_k + f_k \\ v(0) &= u_{0,k} \end{aligned}$$

mit f_k, $u_{0,k}$, u_k, u_{k-1} für $(k \geqslant 3)$ wie in Abschnitt 1.3 im Skript mit $\mathcal{B} = 0$ und zeigen Sie, dass dann schon $v = u_k$ gelten muss. Leiten Sie anschließend die gewünschte Abschätzung her.

Die Übung am Freitag, den 12. November 2021 um 14.30 Uhr fällt aus. Der Termin zur Besprechung des Blattes wird in den Übungen abgesprochen.