Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1

Zeigen Sie:

(i) $-\mathcal{A}_\sigma$ ist Generator einer holomorphen C_0-Halbgruppe auf $W_\sigma^{-r,q}(\mathbb{R}^n)$ für $r \in [0,1]$ und $q \in (1,\infty)$.

(ii) Es gilt $(\mu - \mathcal{A}_\sigma)^{r/2} \in \mathscr{L}_{is}(L^q_\sigma(\mathbb{R}^n), W_\sigma^{-r,q}(\mathbb{R}^n))$ für $r \in [0,1]$ und $\mu \in \rho(\mathcal{A}_\sigma)$.

(iii) Für $1 < q < \infty$ gelte $\|\exp(-t\mathcal{A}_\sigma)f\|_{L^q} \leqslant Ct^{-n/2q}\|f\|_{L^{q/2}}$ $(f \in L^{q/2}(\mathbb{R}^n), t > 0)$.

Hinweis: Es ist $W_\sigma^{-r,q}(\mathbb{R}^n) := \left(W_{0,\sigma}^{r,q'}(\mathbb{R}^n)\right)'$, wobei die Nullrandbedingung im $\mathbb{R}^n$ keine Rolle spielt. Denken Sie an die Resultate über den Stokes-Operator und über gebrochene Potenzen aus dem PDGL-Zyklus. Insbesondere kann Satz 12.22 aus dem Zyklus verwendet werden. Nutzen Sie Dualität aus, um die Ergebnisse auf die negative Skala zu übertragen.

Aufgabe 4.2

Sei $n = 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Nehmen Sie an, dass der Stokes Operator höhere Regularität

$$\mathcal{A}_\sigma : D(\mathcal{A}_\sigma) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^2_\sigma(\Omega)\right) \subset L^2_\sigma(\Omega) \to L^2_\sigma(\Omega)$$

besitzt. Finden Sie Bedingungen dafür, dass für die in Satz 1.4 konstruierte Lösung

$$u \in H^1(J, L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^\infty(J, H^1_{0,\sigma}(\Omega)) \cap L^2(J, D(\mathcal{A}_\sigma))$$

mit $J = (0,T)$, $0 < T < \infty$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie Beschränktheit der approximierenden Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unter den genannten Bedingungen. Nutzen Sie dazu die schwache Formulierung aus dem Beweis von Satz 1.4 aus, indem Sie statt mit φ mit $-\mathcal{A}_\sigma u_k$ testen. Das Lemma von Gronwall kann hilfreich sein. Zeigen Sie außerdem, dass für festes t eine Abschätzung der Form

$$|((u_{k-1}\cdot\nabla)u_k, \mathcal{A}_\sigma u_k)| \leqslant C\|u_{k-1}\|_{L^4}\|\nabla u_k\|_{L^2}^{1/2}\left(\|u_k\|_{L^2}\|^{1/2} + \|\mathcal{A}_\sigma u_k\|_{L^2}^{1/2}\right)\|\mathcal{A}_\sigma u_k\|_{L^2}$$

gilt (Stichwort: Hölder und Gagliardo-Nirenberg) und nutzen Sie diese aus.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 19. November 2021 um 14.30 Uhr besprochen.