Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Zeigen Sie: Es gilt

$$\|e^{-(\cdot)/\alpha} f\|_{L^2((0,d))} \leqslant \frac{\alpha}{2} \|f'\|_{L^2((0,d))}$$

für $\alpha, d > 0$ und $f \in C_c^\infty((0, d])$.
Hinweis: Schreiben Sie $e^{-s/\alpha} f(s)$ als Integral über f' und nutzen Sie die üblichen Norm-Abschätzungen. Denken Sie an die Gamma-Funktion.

Aufgabe 5.2

Sei X ein Banachraum und $A \in H^\infty(X)$. Sei weiter $\alpha \in (0, \pi/\varphi_A^\infty)$. Zeigen Sie, dass

$$(f \circ g)(A) = f(g(A))$$

für $g(z) := z^\alpha$ mit $z \in \Sigma_\varphi$ und $f \in \mathscr{H}_0(\Sigma_{\alpha\varphi})$, wobei φ geeignet gewählt werden muss.
Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung als Cauchy-Integral aus und schreiben Sie die Resolvente $(\lambda - g(A))^{-1}$ mittels der Funktion $\psi(z) = z/(1 + z)^2$ geeignet um, um sie in der Darstellung zu verwenden.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 26. November 2021 um 14.30 Uhr besprochen.