Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

Seien $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ und X ein komplexer Banachraum von Klasse $\mathcal{HT}$. Zeigen Sie, dass für die Ableitung

$$B : W^{k+1,p}(\mathbb{R}, X) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}, X) \to W^{k,p}(\mathbb{R}, X), \quad u \mapsto \dot{u}$$

gilt: $B \in \mathcal{R}H^\infty(W^{k,p}(\mathbb{R}, X))$ mit $\varphi_B^{\mathcal{R},\infty} = \varphi_B = \pi/2$.
Hinweis: Sie dürfen folgendes Lemma verwenden:
Sei $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ und $j \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es ein $K_{\varphi,j} > 0$, sodass

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi|^j \, |\partial^j h(i\xi)| \leqslant K_{\varphi,j} \|h\|_{L^\infty(\Sigma_\varphi)} \quad (h \in \mathscr{H}^\infty(\Sigma_\varphi)).$$

Aufgabe 6.2

Seien X ein Banachraum, $A \in H^\infty(X)$ und $\varphi \in (\varphi_A^\infty, \pi)$. Verifizieren Sie, dass

$$\Phi_A : \mathscr{H}_0(\Sigma_\varphi, \mathscr{C}_A) \to \mathscr{L}(X), \ \ f \mapsto f(A)$$

einen Algebrenhomomorphismus definiert, und finden Sie ggfs. zusätzliche Bedingungen an $f \in \mathscr{H}_0(\Sigma_\varphi, \mathscr{C}_A)$, sodass sich die geforderten Eigenschaften nachweisen lassen.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 03. Dezember 2021 um 14.30 Uhr besprochen.