Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

Sei $1 < p < \infty$, $0 < T < \infty$, $J = (0, T)$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$B_d - A_L : {}_0W^{1,p}(J, L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(J, W^{2,p}(\mathbb{R}^n)) \to L^p(J, L^p(\mathbb{R}^n))$$

einen H^∞-Kalkül besitzt, wobei

$$\begin{aligned} A_L &: D(A_L) := W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto A_L u := \Delta u, \\ B_d &: D(B_d) := {}_0W^{1,p}(J, L^p(\mathbb{R}^n)) \to L^p(J, L^p(\mathbb{R}^n)), \; u \mapsto B_d u := \frac{d}{dt}u. \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Bedingungen aus Kalton-Weis nicht notwendig für einen H^∞-Kalkül sind.

Aufgabe 8.3

Seien $1 < p < \infty$, X_0, X_1 Banachräume mit $X_1 \overset{d}{\hookrightarrow} X_0$,

$$V \subset I_p := (X_0, X_1)_{1-1/p,p}$$

offen und

$$(A, F) \in C^1(V, \mathscr{L}(X_1, X_0) \times X_0).$$

Sei weiter u_* ein Equilibrium des quasilinearen Problems

$$u' + A(u)u = F(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0$$

für $u_0 \in V$ und $A(u_*)$ habe maximale Regularität. Zeigen Sie, dass

$$A_0 v := A(u_*)v + (A'(u_*)v)u_* - F'(u_*)v, \quad v \in X_1$$

maximale Regularität auf endlichen Zeitintervallen besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie eine passende Störung von $A(u_*)$ und zeigen Sie, dass diese relativ beschränkt ist. Nutzen Sie dabei Interpolation und bedenken Sie, dass es sich bei den auftretenden Ableitungen um Fréchet-Ableitungen handelt.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 17. Dezember 2021 um 14.30 Uhr besprochen.