Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

Seien X ein Banachraum, $A \in H^\infty(X)$ und $\varphi \in (\varphi_A^\infty, \pi)$. Sei $f \in \mathscr{H}_0(\Sigma_\varphi, \mathscr{C}_A)$. Zeigen Sie die Darstellungsformel

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)\lambda^{-1/2} A^{1/2} (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda,$$

wobei $\Gamma = \{r \exp(\pm i\theta) \,:\, r > 0\}$ mit $\varphi_A^\infty < \theta < \varphi$.

Aufgabe 9.2

Sei X ein Banachraum, $1 < p < \infty$ und der Operator

$$A : D(A) \subset X \to X, \quad u \mapsto Au$$

gegeben mit $A \in MR(X)$ (A besitze also maximale L^p-Regularität auf $\mathbb{R}_+$).
Zeigen Sie: Gilt zusätzlich $0 \in \rho(A)$, dann existieren $\varepsilon > 0$ und $C = C(\varepsilon) > 0$, sodass für die eindeutige Lösung u des Cauchy-Problems

$$\dot{u} + Au = f, \quad t > 0, \quad u(0) = 0$$

mit $f \in L^p(\mathbb{R}_+, X)$ gilt:

$$\| \exp(\sigma \cdot) u \|_{\mathbb{E}} \leqslant C \| \exp(\sigma \cdot) f \|_{\mathbb{F}}, \quad (\sigma \in [0, \varepsilon]).$$

Dabei repräsentieren $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ den Lösungs- respektive Datenraum der Maximalen Regularität.
Hinweis: Betrachten Sie die Spektralschranke von $-A$.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 07. Januar 2022 um 14.30 Uhr besprochen.
Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Übergang in das neue Jahr 2022!