Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

Seien $1 < p < \infty$, X_0, X_1 Banachräume mit $X_1 \overset{d}{\hookrightarrow} X_0$,

$$V \subset I_p := (X_0, X_1)_{1-1/p,p}$$

offen und

$$(A, F) \in C^1(V, \mathscr{L}(X_1, X_0) \times X_0),$$

wobei $A(v)$ maximale L^p-Regularität für $v \in V$ besitze. Sei weiter

$$u \in W^{1,p}((0,T), X_0) \cap L^p((0,T), X_1) \cap C([0,T], V)$$

die eindeutige Lösung des quasilinearen Problems

$$u' + A(u)u = F(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0$$

mit $u_0 \in V$.
Zeigen Sie, dass die Lösung $u(t)$ ein maximales Existenzintervall $J(u_0) = [0, t_+(u_0))$ besitzt, welches eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Globale Existenz: $t_+(u_0) = \infty$,

(ii) $\liminf_{t \to t_+(u_0)} \operatorname{dist}_{I_p}(u(t), \partial V) = 0$,

(iii) $\lim_{t \to t_+(u_0)} u(t)$ existiert nicht in I_p.

Hinweis: Nutzen Sie Kompaktheit aus. Sie dürfen voraussetzen, dass das quasilineare Problem lokal wohlgestellt ist, d.h., dass für jedes $u_0 \in V$ ein $T := T(u_0) > 0$ sowie ein $\varepsilon := \varepsilon(u_0) > 0$ existiert, sodass für Anfangswerte $u_1 \in \overline{B}_{I_p}(u_0, \varepsilon) \subset V$ eine eindeutige Lösung auf $[0, T]$ mit der oben angegebenen Regularität existiert.

Aufgabe 10.2

Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(\sqrt{x^2+y^2} - 1)^3 - y(\sqrt{x^2+y^2} - 1)^m,\\ \dot{y} &= -y(\sqrt{x^2+y^2} - 1)^3 - x(\sqrt{x^2+y^2} - 1)^m.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie zunächst die Mannigfaltigkeit der Equilibrien $\mathcal{E}$ und zeigen Sie für die Linearisierung $A = f'(z_*)$ um das Equilibrium $z_* = (0, 1)$:

(a) Für $m = 1$ ist $\lambda = 0$ kein halbeinfacher Eigenwert und die Lösung des Problems konvergiert nicht.

(b) Für $m = 2$ hat der Eigenwert $\lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit 2, aber es gilt

$$T_{z_*}\mathcal{E} = \langle \{(1,0)\} \rangle \subsetneq \mathbb{R}^2 = N(A).$$

Die Lösung des Problems konvergiert somit nicht.

Hinweis: Nutzen Sie Polarkoordinaten, um das Gleichungssystem in eine einfachere Form zu bringen.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 14. Januar 2022 um 14.30 Uhr besprochen.