Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1

Sei $n = 1$, $L = 1$ und $Q := (0, 1)$. Zeigen Sie, dass

$$E := \{e_k(\cdot) := \exp(2\pi i k \cdot) \; : \; k \in \mathbb{Z}\}$$

eine Orthonormalbasis von $L^2(Q)$ darstellt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Polynome der Form

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \exp(2\pi i k x)$$

für $N \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_N) \subset \mathbb{C}^N$ dicht in $L^2(Q)$ liegen.

Aufgabe 12.2

Seien $n \in \{2, 3\}$, $m \in \mathbb{N}$, $L > 0$ und $Q_n := (0, L)^n$. Betrachten Sie den Operator

$$A_m : D(A_m) := H^{2m}_\pi(Q_n) \cap L^2_\sigma(Q_n) \subset L^2_\sigma(Q_n) \to L^2_\sigma(Q_n), \; u \mapsto A_m u := (-1)^m \Delta^m u$$

im periodischen Setting. Zeigen Sie, dass A_m maximale Regularität auf $L^2_\sigma(Q_n)$ besitzt.
Hinweis: Bedenken Sie, dass für maximale Regularität auf Hilberträumen bereits die Pseudo-Sektorialität von A_m mit Winkel $\varphi_{A_m} < \pi/2$ ausreichend ist.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 28. Januar 2022 um 14.30 Uhr besprochen.