1	2	3	4	5	Σ

Algebra – Blatt 1

Abgabe am 18.4.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei G eine Gruppe. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie.

(a) Sind H_1 und H_2 Untergruppen von G, so ist auch $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G.

(b) Ist $H \subset G$ eine Untergruppe und $N \triangleleft G$ ein Normalteiler mit $N \subset H$, so ist N auch ein Normalteiler von H.

(c) Für alle $n \geq 1$ ist die Menge $N := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ ein Normalteiler von S_n.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte):

Sei G eine Gruppe und seien $a, b \in G$ Elemente, so dass $\langle a \rangle$ und $\langle b \rangle$ endlich sind.

(a) Zeigen Sie: Ist G abelsch, so ist $|\langle a, b \rangle| \leq |\langle a \rangle| \cdot |\langle b \rangle|$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von G ist und folgern Sie $\langle a, b \rangle = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass die Ungleichung aus (a) völlig falsch sein kann, wenn G nicht abelsch ist. Sei dazu $D_\infty \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$ die Menge der Bijektionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der Form

$$x \mapsto rx + s$$

für $r \in \{1, -1\}$, $s \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie: D_∞ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$. (Man nennt sie die *unendliche Diedergruppe*.)

(c) Betrachten Sie die Elemente $a, b \in D_\infty$, die gegeben sind durch $a(x) := -x$ und $b(x) := 1 - x$. Bestimmen Sie die Gruppen $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ und $\langle a, b \rangle$ und insbesondere die Kardinalitäten dieser Gruppen.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Sei G eine Gruppe.

(a) Für jedes $a \in G$ betrachten wir die Bijektion $\sigma_a \colon G \to G, b \mapsto ab$.
Zeigen Sie: Die Abbildung $f \colon G \to \mathrm{Sym}(G), a \mapsto \sigma_a$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie, dass der Homomorphismus f aus (a) injektiv ist.

(c) Folgern Sie: Für jede endliche Gruppe G gibt es ein $n \geq 1$, so dass G isomorph zu einer Untergruppe von S_n ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei G eine Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $G \to G, b \mapsto aba^{-1}$ ist ein Automorphismus von G.

(b) Ist $G \to G, b \mapsto ab$ ein Automorphismus von G, so ist $a = 1$.

(c) Die Abbildung $G \to G, b \mapsto b^2$ ist ein Endomorphismus von G genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte):

(a) Sei G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge mit $\langle A \rangle = G$. Sei H eine weitere Gruppe und seien $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Zeigen Sie: Wenn f_1 und f_2 auf A übereinstimmen (also $f_1(a) = f_2(a)$ für alle $a \in A$), so ist schon $f_1 = f_2$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
Hinweis: Wählen Sie ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$ und wenden Sie (a) an. Was kann $f(a)$ sein, wenn f ein Automorphismus sein soll?

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$.
Hinweis: Gleiche Strategie wie bei (b).