Name

Matr-Nr. Gruppe

# Algebra – Blatt 10

Abgabe am 20.6.2018 bis 10:30 Uhr

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

**Aufgabe 1 (5 Punkte):**

Wahr oder falsch?

(a) Ist $R$ ein Ring und $a \in R$, so gibt es ein maximales Ideal in $R$, das $a$ enthält.

(b) Ist $K$ ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 1, so ist $(f)$ ein maximales Ideal.

(c) Ist $L/K$ eine Körpererweiterung, so ist $\operatorname{char} L = \operatorname{char} K$.

(d) Ist $K$ ein Körper der Charakteristik 2, so gilt für alle $a \in K$: $a + a = 0$.

(e) Sind $K \subset L \subset M$ Körper und sind $a_1, \dots, a_n \in M$ linear unabhängig über $L$ (d. h. linear unabhängig, wenn man $M$ als $L$-Vektorraum auffasst), so sind sie auch linear unabhängig über $K$.

**Aufgabe 2 (3 Punkte):**

(a) Sei $R$ ein faktorieller Ring und seien $a, b \in R$ teilerfremd. Zeigen Sie: $(a) \cap (b) = (ab)$.

(b) Sei $R$ jetzt ein Hauptidealring, seien $a_1, \dots, a_n$ paarweise teilerfremd, und sei $b := a_1 \cdots a_n$ das Produkt. Zeigen Sie, dass $R/(b)$ als Ring isomorph ist zu $R/(a_1) \times \cdots \times R/(a_n)$.
Hinweis: Verwenden Sie den chinesischen Restsatz.

(c) Sei $K$ ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $\deg f = n \geq 1$, das $n$ verschiedene Nullstellen in $K$ besitzt. Zeigen Sie, dass $K[X]/(f)$ als Ring isomorph zu $K^n$ ist.

**Aufgabe 3 (4 Punkte):**

Ein *lokaler Ring* ist ein Ring, der genau ein maximales Ideal besitzt.

(a) Zeigen Sie: Ein Ring ist lokal genau dann, wenn es ein Ideal $\mathfrak{a}$ gibt, so dass $R^\times = R \setminus \mathfrak{a}$ ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{a}$ das maximale Ideal.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen lokalen Ring $R$ an mit $\mathbb{Z} \subset R \subsetneq \mathbb{Q}$.
Hinweis: Definieren Sie $R$ als die Menge der $\frac{a}{b}$, für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit einer geeigneten Bedingung an $b$. (Die Konstruktion von Blatt 8, Aufgabe 3 kann auch nützlich sein.)

**Aufgabe 4 (4 Punkte):**

Sei $f(X) := 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ und $K := \mathbb{Q}[X]/(f)$. Ist $g \in \mathbb{Q}[X]$, so schreiben wir $\bar{g}$ für das Bild von $g$ in $K$.

(a) Zeigen Sie, dass $K$ ein Körper ist.
Anmerkung: Es reicht, geeignete Resultate aus der Vorlesung zitieren.

(b) Gilt in $K$ die Gleichung $\bar{X}^4 = -1 - \bar{X} - \bar{X}^2 - \bar{X}^3$?

(c) Sei $g_1 = X^6 \in \mathbb{Q}[X]$. Finden Sie ein Polynom $g_2 \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $\leq 3$, so dass $\bar{g}_2 = \bar{g}_1$ ist.

(d) Bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$. Hierbei fassen wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $K$ auf, indem wir für $a \in \mathbb{Q}$ das konstante Polynom $a$ mit $\bar{a} \in K$ identifizieren.