1	2	3	4	Σ

.... Name

.... Matr-Nr. .... Gruppe

Algebra – Blatt 13

Abgabe am 11.7.2018 bis 10:30 Uhr

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $a_i \in L$ algebraisch über K, für $i \in I$ (wobei I eine beliebige Indexmenge ist). Zeigen Sie, dass dann $L_0 := K((a_i)_{i\in I})$ eine algebraische Körpererweiterung von K ist.

Hinweis: Wenden Sie Satz 3.4.2 auf L_0/K an.

Aufgabe 2 (1+2+2+1+1+2 Punkte):

Sei $f(X) := X^3 + X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ und seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f.

(a) Zeigen Sie: Genau eine der Nullstellen a_i liegt in $\mathbb{R}$.
Hinweis: Das geht am besten mit Methoden aus der Analysis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz und zeigen Sie, dass die Ableitung von f immer positiv ist.

Im Folgenden nehmen wir an, dass a_1 die Nullstelle ist, die in $\mathbb{R}$ liegt.

(b) Sei $K := \mathbb{Q}(a_1)$ und sei L der Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie: $[L : K] = 2$.
Hinweis: Verwenden Sie (a) um $L \neq K$ zu zeigen.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Aut}(K)$ trivial ist (also dass der einzige Automorphismus von K die Identität ist).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{Aut}(\mathbb{Q})$ trivial ist. Danach ist Satz 3.4.15 nützlich.

(d) Zeigen Sie, dass es einen Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Aut}(L)$ gibt, der auf K die Identität ist und der a_2 und a_3 vertauscht.
Hinweis: Auch hier ist Satz 3.4.15 nützlich (oder sein Beweis).

(e) Zeigen Sie, dass es einen Automorphismus $\sigma' \in \operatorname{Aut}(L)$ gibt, der a_1 auf a_2 abbildet.

(f) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Aut}(L)$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.
Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass ein Automorphismus von L schon dadurch festgelegt ist, wohin a_1, a_2, a_3 abgebildet werden. Verwenden Sie dann (d) und (e), um zu zeigen, dass jede Permutation der a_i durch einen Automorphimus realisiert werden kann.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und $\sigma \in \operatorname{Aut}(K)$ ein Automorphismus von K.

(a) Wir setzen σ fort zu einer Abbildung $K[X] \to K[X]$, indem wir für $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ definieren: $\sigma(f) := \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) X^i$. Zeigen Sie, dass σ auf diese Art ein Automorphismus des Rings $K[X]$ ist.
Anmerkung: Sie brauchen nicht alle Rechnungen im Detail aufzuschreiben, aber Sie sollten auf jeden Fall angeben, was geprüft werden muss.

(b) Sei nun $f \in K[X]$ und sei $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset K$ die Menge der Nullstellen von f in K. Zeigen Sie, dass $\{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)\}$ die Menge der Nullstellen von $\sigma(f)$ in K ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei $K = \mathbb{F}_5(T)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_5[T]$.

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f = X^5 - T \in K[X]$ irreduzibel ist.

(b) Sei $a \in K^{\mathrm{alg}}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass a sogar eine fünffache Nullstelle von f ist, also dass $f = (X-a)^5$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Aut}(K(a)/K)$ trivial ist.