# Algebra – Blatt 3

Abgabe am 2.5.2018 bis 10:30 Uhr

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

........................................................ .......
Name und Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

**Aufgabe 1 (4 Punkte):**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Finden Sie Matrizen $S \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ und $T \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ wie im Elementarteilersatz (Satz 1.4.5), so dass

$$SAT = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{pmatrix}$$

für $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$. (Die Teilbarkeitsbedingung an die $d_i$ muss nicht erfüllt sein.)

**Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte):**

(a) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen mit 70 Elementen bis auf Isomorphie.

(b) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen mit 72 Elementen bis auf Isomorphie.

(c) Zeigen Sie: Ist $G$ eine endliche abelsche Gruppe und ist $p$ eine Primzahl, die die Ordnung von $G$ teilt, so gibt es ein $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$.
Hinweis: Wenn Sie die Klassifikation der endlich erzeugten abelschen Gruppen verwenden, können Sie $a$ explizit angeben.

**Aufgabe 3 (5 Punkte):**

Welche der folgenden $\lambda\colon G \times X \to X$ sind Operationen der Gruppe $G$ auf der Menge $X$?

(a) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}$, $\lambda_a(x) = a + x$ für $a \in \mathbb{R}^\times$ und $x \in \mathbb{R}$

(b) $G = \mathbb{Z}$, $X = \{0, 1\}$, $\lambda_a(x) = 0$ für $a \in \mathbb{Z}$ und $x \in \{0, 1\}$

(c) $G = \mathbb{Z}$, $X = \{0, 1\}$, $\lambda_a(x) = x$ für $a \in \mathbb{Z}$ und $x \in \{0, 1\}$

(d) $G = S_3$, $X = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_\sigma(x) = \sigma^{-1}(x)$ für $\sigma \in S_3$ und $x \in \{1, 2, 3\}$

(e) $G = S_3$, $X = \{1, 2, 3\}$, $\lambda_\sigma(x) = 4 - \sigma(4 - x)$ für $\sigma \in S_3$ und $x \in \{1, 2, 3\}$

**Aufgabe 4 (2 Punkte):**

Bestimmen Sie die Bahnen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ unter den folgenden beiden Operationen auf $\mathbb{R}^2$:

(a) die Operation von $\mathbb{R}^\times$ auf $\mathbb{R}^2$ durch Skalarmultiplikation

(b) die übliche Operation $(A, v) \mapsto Av$ von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^2$