1	2	3	4	5	Σ

Algebra – Blatt 4

Abgabe am 9.5.2018 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen sind für alle Gruppen G wahr? Begründen Sie.

(a) Das neutrale Element 1 ist zu allen Elementen von G konjugiert.

(b) Das neutrale Element 1 ist zu keinem Element von G konjugiert außer zu sich selbst.

(c) Ist $N \triangleleft G$ ein Normalteiler, so ist $N \subset Z(G)$.

(d) Ist H eine Untergruppe von $Z(G)$, so ist H ein Normalteiler von G.

(e) $Z(Z(G)) = Z(G)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Zeigen Sie: $Z(\mathrm{GL}_n(K)) = \{rI_n \mid r \in K^\times\}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Operation von H auf G, die durch die Gruppenverknüpfung von G gegeben ist, d. h. $H \times G \to G, (h, g) \mapsto hg$. Zeigen Sie: Die Bahnen dieser Operation sind genau die Rechtsnebenklassen von H (in G).

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien $x, x' \in X$ in der gleichen Bahn (d. h. $Gx = Gx'$). Zeigen Sie, dass die Untergruppen $\mathrm{Sta}_G(x)$ und $\mathrm{Sta}_G(x')$ konjugiert sind.

Hinweis: Wählen Sie ein $a \in G$ mit $ax = x'$.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Wir betrachten wieder die unendliche Diedergruppe[1] $D_\infty \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{Z})$, die schon auf Blatt 1 vorkam:

$$D_\infty = \{x \mapsto rx + s \mid r = \pm 1, s \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen von Elementen von D_∞.

(b) Bestimmen Sie alle Normalteiler von D_∞.
Hinweis: Satz 1.6.3 macht die Arbeit leichter.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Alg_SS18/

[1] Das spricht sich übrigens „Di-Eder-Gruppe“ aus.