....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Algebra – Blatt 5

Abgabe am 16.5.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Geben Sie für jede Konjugationsklasse in S_5 ein Beispielelement an und geben Sie an wie viele Elemente die Konjugationsklasse enthält.

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte):

Zeigen Sie in S_n:

(a) Ist $\sigma = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_k) \in S_n$ ein Zykel der Länge k, so lässt sich σ als Produkt von $k-1$ Transpositionen (d. h. Zykel der Länge 2) schreiben; geben Sie diese Transpositionen explizit an.

(b) Jede Transposition $\tau = (x_1\, x_2)$ lässt sich als Produkt von „Nachbartranspositionen" schreiben, d. h. Transpositionen der Form $(y_1\, y_2)$ mit $y_2 = y_1 + 1$.

(c) Folgern Sie: S_n wird von zwei Elementen erzeugt, nämlich $S_n = \langle (1\,2), (1\,2\, \ldots\, n)\rangle$.

Anmerkung: In (a) und (b) wird nicht gefordert, dass die Transpositionen disjunkte Träger haben.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie in S_n:

(a) Ist σ ein Zykel der Länge $k \cdot m$, für $k, m \geq 1$ (mit $k \cdot m \leq n$), so ist σ^k ein Produkt von k Zykeln der Länge m mit disjunkten Trägern.

(b) Für alle hinreichend große n enthält S_n Elemente der Ordnung größer als n. Bestimmen Sie das kleinste solche n.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $V := \langle (1\,2) \circ (3\,4), (1\,3) \circ (2\,4)\rangle \subset S_4$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass V ist ein Normalteiler von S_4 ist.
Hinweis: Bemerkung 1.8.6 ist nützlich.

(c) Geben Sie eine Kompositionsreihe von S_4 an; bestimmen Sie auch die Kompositionsfaktoren. Ist S_4 auflösbar?

(d) Geben Sie ein Beispiel an für Gruppen $H \subset H' \subset G$, so dass H ein Normalteiler von H' und H' ein Normalteiler von G ist, aber H kein Normalteiler von G.
Hinweis: Die Gruppen aus (c) könnten nützlich sein.