....
Name

Algebra – Blatt 6

Abgabe am 23.5.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung 15 (bis auf Isomorphie).

Aufgabe 2 (2+1+2+2 Punkte):

Seien G_1 und G_2 Gruppen und sei $\lambda\colon G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1), b \mapsto \lambda_b$ ein Gruppenhomomorphismus (also eine Operation von G_2 auf G_1 durch Automorphismen).

Wir definieren auf der Menge $G_1 \times G_2$ die folgende Verknüpfung:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (a\lambda_b(a'), bb') \qquad \text{für } a, a' \in G_1, b, b' \in G_2.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge $G_1 \times G_2$ ist mit dieser Verknüpfung eine Gruppe.
(Man nennt dies ein *semidirektes Produkt* von G_1 und G_2 und schreibt $G_1 \rtimes_\lambda G_2$ dafür.)

(b) Die Abbildungen $G_1 \to G_1 \rtimes_\lambda G_2, a \mapsto (a, 1)$ und $G_2 \to G_1 \rtimes_\lambda G_2, b \mapsto (1, b)$ sind Gruppenhomomorphismen, und das Bild von G_1 in $G_1 \rtimes_\lambda G_2$ ist ein Normalteiler.

(c) Ist G eine Gruppe, $N \triangleleft G$ ein Normalteiler und $H \subset G$ eine Untergruppe, so dass sich jedes Element von G auf genau eine Art als Produkt ab mit $a \in N$, $b \in H$ schreiben lässt, so ist $G \cong N \rtimes_\lambda H$ für eine geeignete Operation $\lambda\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$.
Geben Sie diese Operation λ und den Isomorphismus $N \rtimes_\lambda H \to G$ an.

(d) Ist G eine Gruppe der Ordnung pq, für zwei verschiedene Primzahlen p, q, so ist G isomorph zu einem semidirekten Produkt von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Sylow-Sätze, um zu zeigen, dass die Voraussetzungen von (c) erfüllt sind.

Aufgabe 3 (2+1+2 Punkte):

Für natürliche Zahlen $n \geq 1$ definiert man die *endlichen Diedergruppen* als semidirekte Produkte: $D_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\lambda \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\lambda_{\bar{1}}(\bar{m}) = -\bar{m}$ für $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Sei $p \geq 3$ prim. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau zwei Automorphismen $g_1, g_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ mit $g_i^2 = \mathrm{id}$.
Hinweis: Welche Bedingung an $\bar{k} := g_i(\bar{1})$ folgt aus $g_i^2 = \mathrm{id}$? Benutzen Sie, dass $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist, um alle $\bar{k}$ zu finden, die dieser Bedingung genügen.

(b) Es gibt genau zwei Gruppenhomomorphismen $f_1, f_2\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

(c) Ist G eine Gruppe der Ordnung $2p$, so ist entweder $G \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ oder $G \cong D_p$.
Hinweis: Verwenden Sie (b); und anstatt die Sylow-Sätze anzuwenden, können Sie Aufgabe 2 (d) verwenden.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei R ein Ring (kommutativ, mit 1). Zeigen Sie (wobei Sie nur die Definition von Ring verwenden sollen):

(a) Für alle $a \in R$ gilt $0 \cdot a = 0$.

(b) Gilt $0 = 1$ in R, so ist $R = \{0\}$.

(Hierbei bezeichnet 0 das neutrale Element bezüglich $+$.)