1	2	3	4	5	Σ

....
Name

Algebra – Blatt 7

Abgabe am 30.5.2018 bis 10:30 Uhr

....
Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Ist K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so enthält das Ideal (f) alle Polynome vom Grad $\geq n$.

(b) Ist K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, so hat jedes Polynom in $(f) \setminus \{0\}$ Grad $\geq n$.

(c) Sind R und S Ringe und sind $f, g \in \operatorname{Hom}(R, S)$, so ist auch die Summe $h\colon R \to S, a \mapsto f(a) + g(a)$ ein Ringhomomorphismus von R nach S.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge $A \subset R$ ist ein Ideal genau dann, wenn für alle $a, b \in A$ und alle $r \in R$ gilt: $a + rb \in A$.

(b) Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so gilt $1 \in \mathfrak{a}$ genau dann wenn $\mathfrak{a} = R$.

(c) Ist K ein Körper und $f\colon K \to R$ ein Ringhomomorphismus, so ist entweder f injektiv, oder R ist der Nullring (d. h. $R = \{0\}$).

(d) Ist S ein weiterer Ring, $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und ist $\mathfrak{b} \subset S$ ein Ideal von S, so ist $f^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal von R.

(e) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt: Ist $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal von R, so muss $f(\mathfrak{a})$ kein Ideal von S sein.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Welche der folgenden Mengen A_i sind Unterringe von R_i, welche sind Ideale von R_i? (Sie brauchen ihre Antworten nur kurz zu begründen.)

(a) $R_1 = \operatorname{Abb}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ (die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{R}$) als Ring aufgefasst mit punktweiser Addition und Multiplikation, $A_1 = \{f \in R_1 \mid f(1) = 1\}$.

(b) $R_2 = \mathbb{R}[X]$, $A_2 = \{f \in R_2 \mid \deg f \geq 2\} \cup \{0\}$

(c) $R_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $A_3 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei $R = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (mit punktweiser Addition und Multiplikation). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in R$ die charakteristische Funktion der Menge $\{n\}$, d. h.

$$f_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = n \\ 0 & \text{falls } i \neq n. \end{cases}$$

Sei außerdem $g \in R$ die Funktion, die konstant 1 ist. Zeigen Sie, dass g nicht im Ideal liegt, das von $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird.

Aufgabe 5 (1+2 Punkte):

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass R kein Integritätsbereich ist.
Hinweis: Welche Bedingungen an Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X]$ erhält man, damit $\bar{f}, \bar{g} \in R$ zeigen, dass R kein Integritätsbereich ist? Können Sie solche Polynome finden?

(b) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$ isomorph zum Ring $\mathbb{R}^2$ ist.
Hinweis: Der Isomorphismus ist nicht so ganz naheliegend. Es kann helfen, sich zu überlegen, wohin die Polynome abgebildet werden müssen, die Sie in (a) gefunden haben.