1	2	3	4	Σ

....
Name

Algebra – Blatt 8

Abgabe am 6.6.2018 bis 10:30 Uhr

....
Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Wir arbeiten im Ring $\mathbb{Z}[X]$.

(a) Ist $(2, X)$ ein Hauptideal?

(b) Ist $2X^2 + 4$ irreduzibel?

(c) Sind 2 und X teilerfremd?

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Die irreduziblen Elemente von $\mathbb{C}[X]$ sind genau die Polynome vom Grad 1.
Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz der Algebra.

(b) Ist $f \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel, so ist $\deg f \leq 2$.
Hinweis: Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, so auch das komplex Konjugierte $\bar{a}$, und es gilt $(X - a)(X - \bar{a}) \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Geben Sie ein Polynom vom Grad 3 in $\mathbb{Q}[X]$ an, das (in $\mathbb{Q}[X]$) irreduzibel ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Sei R ein Integritätsbereich und $S \subset R \setminus \{0\}$ eine nicht-leere Teilmenge, die unter Multiplikation abgeschlossen ist, d. h. aus $a, b \in S$ folgt $ab \in S$. Wie betrachten $R' := \{\frac{a}{b} \mid a \in R, b \in S\} \subset \mathrm{Quot}(R)$. Zeigen Sie:

(a) R' ist ein Ring.

(b) Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von R' ist schon durch den Schnitt $\mathfrak{a} \cap R$ bestimmt (d. h. sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ zwei Ideale von R' mit $\mathfrak{a}_1 \cap R = \mathfrak{a}_2 \cap R$, so ist $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$).

(c) Ist R ein Hauptidealring, so auch R'.

Aufgabe 4 (1+2+2+1 Punkte):

Sei $R := \{r + si \mid r, s \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$, wobei $i = \sqrt{-1}$. Zeigen Sie:

(a) R ist ein Ring (und damit auch ein Integritätsbereich).

(b) Zeigen Sie: $R^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Einheit von R (komplexe) Norm 1 haben muss.

(c) R ist faktoriell.
Hinweis: Zeigen Sie, dass R euklidisch ist mit $\sigma(r + si) := r^2 + s^2$ und verwenden Sie dann Sätze aus der Vorlesung.

(d) Zeigen Sie, dass 2 als Element von R nicht irreduzibel ist.