....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Algebra – Blatt 9

Abgabe am 13.6.2018 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen gelten in allen faktoriellen Ringen R und für alle $a \in R$?

(a) Sind $p_1, p_2 \in R$ irreduzibel mit $\frac{p_1}{p_2} \in R^\times$, so ist $v_{p_1}(a) = v_{p_2}(a)$.

(b) Ist $v_p(a) = 0$ für alle irreduziblen $p \in R$, so ist $a \in R^\times$.

(c) Ist a ein Quadrat (d. h. $a = b^2$ für ein $b \in R$), so ist $v_p(a)$ gerade für alle irreduziblen $p \in R$.

(d) Ist $v_p(a)$ gerade für alle irreduziblen $p \in R$, so ist a ein Quadrat.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei R ein faktorieller Ring und seien $a, b, b' \in R \setminus \{0\}$. Die folgenden Behauptungen sollen nur unter Verwendung der Definition von faktoriellen Ringen gezeigt werden:

(a) Ist $bb' = ep_1 \cdots p_k$ eine Primfaktorzerlegung von bb' (mit $e \in R^\times$ und p_i irreduzibel), so gibt es Einheiten e', e'' und eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, k\}$, so dass $b = e' \prod_{i \in I} p_i$ und $b' = e'' \prod_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus I} p_i$ ist.

(b) Ist a sowohl zu b als auch zu b' teilerfremd, so ist a auch teilerfremd zu bb'.
(Anmerkung: Dies wurde in der Vorlesung zwar behauptet, aber nicht bewiesen.)

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei R ein faktorieller Ring. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für irreduzible $p \in R$ der Quotient $R/(p)$ ein Integritätsbereich ist. Zeigen Sie die Rückrichtung: Ist $a \in R \setminus \{0\}$ ein Element, so dass $R/(a)$ ein Integritätsbereich ist und nicht der Nullring, so ist a irreduzibel.

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte):

Zeigen Sie (z. B. mit Hilfe des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums), dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind:

(a) $f_1 = X^6 - 600$

(b) $f_2 = 5X^5 + 25$.

(c) $f_3 = 3X^4 + 18X + 4$
Hinweis: Betrachten Sie $g(X) := X^4 f_3(X^{-1})$.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Sei R faktoriell, $K = \mathrm{Quot}(R)$, und seien $f, g \in K[X]$ normierte Polynome mit $fg \in R[X]$. Zeigen Sie, dass dann schon $f, g \in R[X]$ gilt.