Aufgabe 1 (2 Punkt):

Ist die Menge der ungeraden Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$?

Aufgabe 2 (1+2 Punkte):

Sei G eine endliche Gruppe und seien $H, H' \subsetneq G$ zwei echte Untergruppen. Zeigen Sie:

(a) Ist $H \subsetneq H'$, so ist $\#H \leq \frac{1}{4}\#G$.

(b) Ist $H \neq H'$, so ist $\#(H \cap H') \leq \frac{1}{4}\#G$.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Bringen Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

auf Elementarteilerform, d. h. geben Sie eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

an, die sich als $B = SAT$ schreiben lässt, wobei S und T invertierbare Matrizen sind mit $S, S^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}, T, T^{-1} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. ($S$ und T brauchen *nicht* angegeben zu werden. Wenn Sie B aus A durch geeignete Zeilen- und Spaltentransformationen erhalten, brauchen Sie auch nicht zu begründen, dass es solche S und T gibt.)

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei G eine 7-elementige Gruppe, die auf einer 6-elementigen Menge X operiert. Zeigen Sie, dass die Operation trivial ist, d. h. dass $ax = x$ gilt für alle $a \in G$ und alle $x \in X$.

Hinweis: Was können Sie über Bahnlängen aussagen?

Alternativ-Hinweis: Was können Sie über Homomorphismen von G nach S_6 sagen?

Aufgabe 5 (2+2 Punkte):

Sei R ein Ring und $A := \{(a, a) \mid a \in R\}$. Zeigen Sie:

(a) A ist ein Unterring von $R \times R$.

(b) Ist R nicht-trivial (also $R \neq \{0\}$), so ist A kein Ideal in $R \times R$.

Aufgabe 6 (3 Punkte):

Zeigen Sie, dass $5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal des Rings $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass das Polynom $X^6 + 21X^4 + 60 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte):

(a) Gibt es einen Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, der $\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}$ abbildet?

(b) Zeigen Sie, dass es keinen Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ gibt, der $\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}$ abbildet.
Hinweis: $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$. Wohin müsste $\sqrt[4]{2}$ abgebildet werden?

(c) Gibt es einen Oberkörper K von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, der einen Automorphismus besitzt, der $\sqrt{2}$ auf $-\sqrt{2}$ abbildet?

Aufgabe 9 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist L/K eine Körpererweiterung vom Grad 7 und $a \in L \setminus K$ beliebig, so ist $L = K(a)$.

Aufgabe 10 (3 Punkte):

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, sei $f \in K[X]$ irreduzibel, sei L der Zerfällungskörper von f und sei $a \in K^{\mathrm{alg}}$ eine Nullstelle von f. Wir nehmen an, dass $K(a) \neq L$ ist. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L/K)$ nicht abelsch ist.

Hinweis: Ist $\mathrm{Aut}(L/K(a))$ eine normale Untergruppe von $\mathrm{Aut}(L/K)$?