Aufgabe 1 (2 Punkte):

Gibt es eine Untergruppe von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, die isomorph zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ist?

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

(a) Geben Sie ein Element $a \in \mathbb{Q}^\times$ der Ordnung 2 und ein Element $b \in \mathbb{Q}^\times$ der Ordnung ∞ an.

(b) Geben Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}^\times$ an.
Hinweis: Die Elemente a und b aus (a) sind nützlich.

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Bringen Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

auf Elementarteilerform, d. h. geben Sie eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

an, die sich als $B = SAT$ schreiben lässt, wobei S und T invertierbare Matrizen sind mit $S, S^{-1} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}, T, T^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$. ($S$ und T brauchen *nicht* angegeben zu werden. Wenn Sie B aus A durch geeignete Zeilen- und Spaltentransformationen erhalten, brauchen Sie auch nicht zu begründen, dass es solche S und T gibt.)

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei G eine Gruppe der Ordnung 16, die auf einer Menge X mit 11 Elementen operiert. Zeigen Sie, dass eine solche Operation mindestens drei Bahnen hat.

Hinweis: Was können Sie über Bahnlängen sagen?

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte):

Sei R ein Ring (kommutativ, mit 1) und sei $a \in R$ ein Element, für das $a^2 = a$ gilt.

(a) Zeigen Sie: $(1-a)^2 = 1 - a$.

(b) Sei $S_1 := \{b \in R \mid (1-a)b = 0\}$ und $S_2 := \{ab \mid b \in R\}$. Zeigen Sie: $S_1 = S_2$.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge S_1 (aus (b)) ein Ring ist (mit der Addition und der Multiplikation von R); geben Sie insbesondere das multiplikative neutrale Element des Rings S_1 an.

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Seien R und S zwei nicht-triviale Ringe (also $R \neq \{0\}$ und $S \neq \{0\}$). Zeigen Sie, dass $R \times S$ kein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ keine dritte Potenz (also $n \neq m^3$ für alle $m \in \mathbb{N}$), so ist $\sqrt[3]{n}$ schon irrational.

Hinweis: Sie können den Satz (aus der Vorlesung) verwenden, dass ein Polynom, das in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist, auch in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8 (2 Punkte):

Gibt es Elemente $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ mit $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 4$, $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}] = 5$ und $[\mathbb{Q}(a+b) : \mathbb{Q}] = 100$?

Aufgabe 9 (2+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Das Polynom $f(X) := X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ ist irreduzibel.
Hinweis: Hat f Nullstellen in $\mathbb{F}_2$?

(b) Folgern Sie, dass es einen Körper mit 8 Elementen gibt.

Aufgabe 10 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Ist K ein Körper der Charakteristik 0 und $L \supset K$ der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad $n \geq 2$, so besitzt $\mathrm{Aut}(L/K)$ eine (möglicherweise triviale) Untergruppe vom Index n.

Hinweis: Betrachten Sie $K(a)$, für eine Nullstelle a von f.