Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2018

Probeklausur Algebra

Diese Probeklausur sollte vom Umfang und von der Art der Aufgaben etwa den eigentlichen Algebra-Klausuren entsprechen; garantieren kann ich dafür natürlich nicht. (Die Aufgaben decken auch nicht unbedingt alle Bereiche ab; sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.)

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Gibt es eine Gruppe $(G, \cdot)$ und ein Element $a \in G \setminus \{1\}$ so dass $a^2 = a$ ist?

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Untergruppe $H \subset \mathbb{Z}^2$ an, die nicht die Form $m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ hat für $m, n \in \mathbb{N}$.

(b) Nach einem Satz aus der Vorlesung gibt es einen Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)$, so dass $f(H)$ die Form $m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ hat für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen solchen Automorphismus f an (für Ihre Gruppe H aus (a)).

Aufgabe 3 (3 Punkte):

Bringen Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

auf Elementarteilerform, d. h. geben Sie eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

an, die sich als $B = SAT$ schreiben lässt, wobei S und T invertierbare Matrizen mit $S, S^{-1}, T, T^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ sind. (S und T brauchen *nicht* angegeben zu werden. Wenn Sie B aus A durch geeignete Zeilen- und Spaltentransformationen erhalten, brauchen Sie auch nicht zu begründen, dass es solche S und T gibt.)

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Alle Gruppen der Ordnung 91 sind abelsch.

Zur Erinnerung: Laut Sylow-Sätzen gilt für die Anzahl s der p-Sylow-Gruppen einer Gruppe der Ordnung $m \cdot p^\ell$ (wobei $p \nmid m$): $s \equiv 1 \mod p$ und $s \mid m$.

Bemerkung: $91 = 7 \cdot 13$

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Geben Sie ein Beispiel für ein Ring R (kommutativ, mit 1) und I_1, I_2 Ideale von R an, so dass $I_1 \cup I_2$ kein Ideal von R ist.

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass es keinen injektiven Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Q}$ gibt.

Zur Erinnerung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der einzige Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ die Inklusionsabbildung ist. Aber was ist $f(X)$?

Aufgabe 7 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom und $a \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f, so ist sogar schon $a \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz (aus der Vorlesung), dass eine Zerlegung von f in ein Produkt $g_1 \cdot g_2$ mit $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[X]$ schon eine Zerlegung $f = h_1 \cdot h_2$ mit $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[X]$ induziert (wobei sich h_i und g_i nur um einen konstanten Faktor unterscheiden).

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f = X^3 + 2X + 6 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Lässt sich a^4 in der Form $b_0 + b_1 a + b_2 a^2$ schreiben für geeignete $b_i \in \mathbb{Q}$? Wenn ja, geben Sie solche b_i an.

(c) Sei $a' \neq a$ eine weitere Nullstelle von f. Geben Sie ein Polynom g vom Grad 2 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(a)$ an, so dass $g(a') = 0$ ist.

Aufgabe 9 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper und sind $L, L' \subset K^{\mathrm{alg}}$ Oberkörper von K mit $[L : K] = 6$ und $[L' : K] = 7$, so ist $L \cap L' = K$.

Aufgabe 10 (2+2 Punkte):

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $L \supset K$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine endliche Körpererweiterung M/L so dass M/K normal ist.

(b) Die Körpererweiterung L/K hat nur endlich viele Zwischenkörper.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die entsprechende Aussage für M/K.