Übungsblatt 2

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 24.10.2017, Abgabe: Do., 02.11.2017

Aufgabe 1: (De Morgan'sche Regeln)
Seien I eine nichtleere Menge und für jedes $i \in I$ sei $M_i \subseteq M$ Teilmenge der nichtleeren Menge M. Zeigen Sie:

$$M \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} M_i \Big) = \bigcup_{i \in I} (M \setminus M_i) \qquad \text{und} \qquad M \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} M_i \Big) = \bigcap_{i \in I} (M \setminus M_i)$$

B **Aufgabe 2:** (Abbildungen, $1 + 1 + 1 + 1$ Punkte)
Für $A,\, B \subseteq \mathbb{R}$ sei $f : A \longrightarrow B$ gegeben als

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x, & \text{falls } x < 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Entscheiden Sie, in welchen der folgenden Fälle f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist:

(i) $A = [0,\, 1]$ und $B = [0,\, 1]$;

(ii) $A = [0,\, 1]$ und $B = [-1,\, 1]$;

(iii) $A = [-1,\, 1]$ und $B = [0,\, 1]$;

(iv) $A = [-1,\, 1]$ und $B = [-1,\, 1]$.

B **Aufgabe 3:** (Axiomensystem der reellen Zahlen, $2 + 2 + 2 + 2$ Punkte)
Folgern Sie ausschließlich aus den Axiomen (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (D) und den in Lemma 2.1–2.3 bewiesenen Aussagen die folgenden Rechenregeln für reelle Zahlen:

a) $\forall a,\, b \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\} : \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

b) $\forall a,\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall b,\, d \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\} : \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

c) $\forall a,\, c \in \mathbb{R} : \quad \forall b,\, d \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\} : \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$

d) $\forall a \in \mathbb{R} : \quad \forall b,\, c,\, d \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\} : \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

B **Aufgabe 4:** (Axiomensystem der reellen Zahlen, $3 + 3$ Punkte)
Folgern Sie ausschließlich aus den Axiomen (A1)–(A4), (M1)–(M4), (D) und (O1)–(O3) und den in Lemma 2.4 bewiesenen Aussagen die folgenden Ungleichungen für reelle Zahlen:

a) Für $a,\, b > 0$ gilt $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$.

b) Für $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ gilt $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.