Übungsblatt 3

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 31.10.2017, Abgabe: Di., 07.11.2017

Aufgabe 1: (Abbildungen und Verkettungen)

a) Berechnen Sie für die Abbildungen

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) := \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases} \qquad g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad g(n) := \begin{cases} n-1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ n+1, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

die Verkettungen $f \circ g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ und $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

b) Seien X, Y und Z nichtleere Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ sowie $g : Y \longrightarrow Z$ bijektiv. Zeigen Sie, dass $g \circ f : X \longrightarrow Z$ bijektiv ist mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

B **Aufgabe 2:** (Ungleichungen, $1+1+1+1$ Punkte)
Seien x, $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \leq y$. Zeigen Sie, dass

$$x^2 \leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq y^2,$$

wobei alle diese Ungleichungen strikt sind, es sei denn $x = y$.

B **Aufgabe 3:** (Der Betrag reeller Zahlen, $2+2$ Punkte)
Seien x, $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$ und (ii) $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

B **Aufgabe 4:** (Infimum und Supremum, Minimum und Maximum, $2+2+2$ Punkte)
Bestimmen Sie, falls vorhanden, jeweils Infimum, Supremum, Mimimum und Maximum von

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{x^2-2}{x^2+1} \,:\, x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R} :\ (x+1)^2 + 5y^2 < 4 \right\}$$

als Teilmengen von $\mathbb{R}$.

B **Aufgabe 5:** (Vollständige Induktion, $2+2$ Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k}) = n + 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.