Übungsblatt 4

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 07.11.2017, Abgabe: Di., 14.11.2017

Aufgabe 1: (Infimum und Supremum)

a) Sind $\varnothing \neq X,\, Y \subseteq \mathbb{R}$ mit $X \subseteq Y$, dann ist $\inf X \geq \inf Y$ und $\sup X \leq \sup Y$.

b) Gibt es zwei Mengen $\varnothing \neq X,\, Y \subseteq \mathbb{R}$ mit $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$ aber $\inf X = \inf Y$ und $\sup X = \sup Y$?

B **Aufgabe 2:** (Binominalkoeffizienten, $1+1+2$ Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Zeigen Sie, dass

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

B **Aufgabe 3:** (Bernoulli'sche Ungleichungen, $2+2$ Punkte)
Zeigen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ungleichungen:

a) Für $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \geq 0$ ist $\quad (1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

b) Für $0 \leq x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \leq 1$ ist $\quad (1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n) \geq 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n$.

B **Aufgabe 4:** (Komplexe Zahlen, $2+2+2+2$ Punkte)

a) Stellen Sie jeweils Addition und Multiplikation von $z,\, w \in \mathbb{C}$ graphisch dar für

$$\text{(i)} \quad z = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2+i) \quad \text{und} \quad w = \tfrac{3}{2} + 2i \qquad\qquad \text{(ii)} \quad z = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3-i) \quad \text{und} \quad w = -i.$$

b) Stellen Sie die Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = x + iy$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}$ dar für

$$\text{(i)} \quad z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad z = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}.$$

c) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}$ mit $x,\, y \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die komplexe Zahl w dar als $w = u + iv$ mit $u,\, v \in \mathbb{R}$ für

$$\text{(i)} \quad w = z + (\bar{z})^{-1} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad w = (\bar{z})^2 + \tfrac{1}{z^2}.$$

d) Für alle $z,\, w \in \mathbb{C}$ gilt die Parallelogrammgleichung $|z|^2 + |w|^2 = \frac{1}{2}(|z+w|^2 + |z-w|^2)$.

B **Aufgabe 5:** (Abzählbarkeit, $2+2$ Punkte)

a) Sei M eine abzählbare Menge und $\varnothing \neq A \subseteq M$. Dann ist A abzählbar.

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ an.