Übungsblatt 5

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 14.11.2017, Abgabe: Di., 21.11.2017

B **Aufgabe 1:** (Folgen und Grenzwerte, $2+2+2+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ jeweils auf Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an für

(i) $x_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (ii) $x_n := \frac{2^n+(-3)^n}{(-2)^n+3^n}$,

(iii) $x_n := \frac{n^2}{n^2+2n+2}$, (iv) $x_n := \sqrt[n]{n}$.

Hinweis: Betrachten Sie bei (iv) die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $y_n = x_n - 1$ und berechnen Sie $(1+y_n)^n = x_n^n = n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, um y_n nach oben abzuschätzen.

B **Aufgabe 2:** (Folgen und Grenzwerte, 4 Punkte)
Seien $a > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_0 < \frac{1}{a}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch $x_n := 2x_{n-1} - ax_{n-1}^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge zunächst auf Beschränktheit und Monotonie.

B **Aufgabe 3:** (Konvergenzkriterien für Folgen, $2+2+2$ Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

a) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge sowie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| \leq y_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

   (i) $x_n + y_n \to x + y$ für $n \to \infty$,

   (ii) $\alpha x_n \to \alpha x$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4: (Konvergenzkriterien für Folgen)
Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Eigenschaft die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ impliziert für

(i) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \geq n_0 : |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$,

(ii) $\exists C > 0\; \exists n_0 \in \mathbb{N}\; \forall n \geq n_0 : |x_{n+1} - x_n| < C2^{-n}$.