# Übungsblatt 6

## Analysis I, WiSe 2017/2018

## Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Ausgabe: Di., 21.11.2017, Abgabe: Di., 28.11.2017

**Aufgabe 1:** (Mischfolgen)
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definiert als $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.

**B** **Aufgabe 2:** (Folgen und Grenzwerte, $2+2$ Punkte)
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(i) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$

falsch sind. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind diese Aussagen wahr?

**B** **Aufgabe 3:** (Limes Inferior/Limes Superior, $1+1+1+1$ Punkte)
Geben Sie jeweils ein Beispiel an für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit

a) $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ existieren beide nicht;

b) $\liminf_{n\to\infty} x_n$ existiert und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ existiert nicht;

c) $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ existieren beide mit $\liminf_{n\to\infty} x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n$;

d) $\limsup_{n\to\infty} x_n = x$ existiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n > x$.

Geben Sie im Fall der Existenz des Limes Inferior bzw. des Limes Superior jeweils eine Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die gegen $\liminf_{n\to\infty} x_n$ bzw. $\limsup_{n\to\infty} x_n$ konvergiert.

**B** **Aufgabe 4:** (Reihen und Konvergenz, $2+2+2+2+2+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{a} - 1)^k, \quad$ wobei $a > 0$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2 - 3k + 7}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{(k^2+1)^{4/3}}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$