Übungsblatt 7

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 28.11.2017, Abgabe: Di., 05.12.2017

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (Reihen, $3+3$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$$

B **Aufgabe 2:** (Cauchy'scher Verdichtungssatz, $2+2$ Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die „verdichtete“ Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie (unter Verwendung von Teil a)), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ absolut konvergiert und für $\alpha \leq 1$ diviergiert.

B **Aufgabe 3:** (Cauchy-Produkt, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergiert, und, dass das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst diviergiert. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 3.56?

B **Aufgabe 4:** (Bedingte Konvergenz und Umordnungen, 4 Punkte)
Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert (bedingt) gegen ein $s \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Umordnung dieser Reihe an, die gegen $\frac{1}{2}s$ konvergiert.

Hinweis: Beachten Sie, dass $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$, ...

Aufgabe 5: (Wurzel- und Quotientenkriterium)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Nach dem Wurzelkriterium (Satz 3.37) bzw. dem Quotientenkriterium (Satz 3.38) i.V.m. Bemerkung 3.39 (b) konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, falls $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ bzw. falls $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\limsup_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. Zeigen Sie:

a) Ist $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Ist $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\liminf_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.