Übungsblatt 8

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 05.12.2017, Abgabe: Di., 12.12.2017

B **Aufgabe 1:** (Potenzreihen und Konvergenzradius, $3+3+3$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{\sqrt{k}} x^k \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \big(2+(-1)^k\big)^{-k} x^k \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k + e^{-1}}{2} x^k$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass a^α $(= \exp(\alpha \log a))$ für alle $a > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine wohldefinierte reelle Zahl ist. Weiterhin dürfen Sie verwenden, dass für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$ mit $\varepsilon > 0$ und eine Nullfolge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ stets $a_k^{\alpha_k} \to 1$ für $k \to \infty$ gilt.

B **Aufgabe 2:** (Potenzreihen gerader Funktionen, 3 Punkte)
Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Zeigen Sie, dass f genau dann gerade ist (d. h. $f(-x) = f(x)$ für $|x| < r$), wenn $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ gilt (vgl. Korollar 3.66).

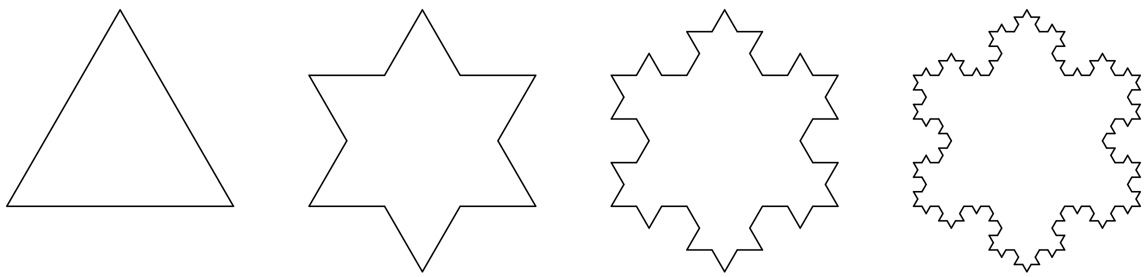
B **Aufgabe 3:** (Häufungspunkte, 3 Punkte)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt von M ist, wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \setminus \{x\}$ existiert mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ (vgl. Lemma 4.9).

Aufgabe 4: (Abgeschlossene Mengen)
Zeigen Sie (vgl. Satz 4.14):

a) Der Durchschnitt (beliebig vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

b) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

B **Aufgabe 5:** (Weihnachtsaufgabe, $2+2$ Punkte + 3 Bonuspunkte)
Frau Holle hat ihr Rezept für Schneeflocken verloren! Helfen Sie ihr:



K_0 K_1 K_2 K_3

Die *Koch'sche Schneeflocke* kann wie folgt konstruiert werden: Sei K_0 ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a > 0$. Dann entsteht K_1 aus K_0, indem jede der 3 Seiten von K_0 in jeweils 3 gleiche Teile geteilt wird und der jeweils mittlere Teil durch zwei gleich lange neue Teile ersetzt wird, die mit dem ersetzten Teil ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\frac{1}{3}a$ bilden. So erhält man die Figur K_1 mit $4 \cdot 3$ Seiten der Länge $\frac{1}{3}a$. Analog entsteht K_2 aus K_1. So erhält man die Figur K_2 mit $4^2 \cdot 3$ Seiten der Länge $\frac{1}{3^2}a$. Allgemein entsteht nach dem obigen Verfahren K_n aus K_{n-1}. So erhält man die Figur K_n mit $4^n \cdot 3$ Seiten der Länge $\frac{1}{3^n}a$. Die *Koch'sche Schneeflocke* K ist dann gegeben als $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.

a) Zeigen Sie, dass K keinen endlichen Umfang hat.

b) Zeigen Sie, dass K einen endlichen Flächeninhalt hat; berechnen Sie diesen.

c) Malen Sie ein (weihnachtliches) Bild, in dem eine Iteration K_n der Koch'schen Schneeflocke mit $n \geq 2$ vorkommt. Hierbei sind Ihrer Kreativität keine Grenzen gesetzt.

Lösungen zu c) werden – unter der Bedingung, dass auch a) und b) bearbeitet wurden – mit 3 Bonuspunkten belohnt; die kreativsten Lösungen zu c) werden zusätzlich in der Vorlesung am 22.12.2017 mit hausgemachtem Gebäck prämiert. Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu dieser Aufgabe getrennt von Ihren Lösungen zu den Aufgaben 1 – 3 ab.