Übungsblatt 10

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 19.12.2017, Abgabe: Di., 09.01.2018

B **Aufgabe 1:** (Stetige Funktionen, 2 Punkte)
Seien $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist f streng monoton.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Zwischenwertsatzes.

B **Aufgabe 2:** (Gleichmäßige Konvergenz, 3 Punkte)
Seien $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, so gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, dass

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0.$$

B **Aufgabe 3:** (Funktionenfolgen, $3 + 3 + 3$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz für

a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{x^2}{1+(nx)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$;

b) $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+(nx)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$;

c) $f_n : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+(nx)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

B **Aufgabe 4:** (Funktionenreihen, $3 + 3$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \text{ für } x \in [0, 1] \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^n} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 5: (Stetigkeit)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}, & \text{falls } x \notin \mathbb{N}, \\ \frac{4x-6}{x+1}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

und bestimmen Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ an denen f stetig bzw. unstetig ist.