Übungsblatt 11

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 09.01.2018, Abgabe: Di., 16.01.2018

B **Aufgabe 1:** (Differenzierbarkeit, 3 Punkte)
Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in D$. Zeigen Sie, dass f genau dann in x_0 differenzierbar ist, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : D \longrightarrow \mathbb{R}$ existieren mit

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x) \qquad \text{für alle } x \in D \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{-1} r(x) = 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall $a = f'(x_0)$ gilt.

B **Aufgabe 2:** (Höhere Ableitungen, 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom p_n vom Grad $2n$ existiert, so dass für alle $x > 0$ gilt: $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x}) f(x)$.

Hinweis: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D sowie $f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so heißt $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ die *zweite Ableitung von f in x_0*. Ist f' differenzierbar auf D, so erhält man so die zweite Ableitung $f'' : D \longrightarrow \mathbb{R}$ von f. Induktiv ist so für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die *n-te Ableitung* $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ definiert.

Hinweis: Sie können verwenden, dass für jedes Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{t \to \infty} p(t) e^{-t} = 0$.

B **Aufgabe 3:** (Kettenregel, $3 + 3$ Punkte)
Berechnen Sie die (ersten) Ableitungen der Funktionen $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben sind als

$$f(x) = x^x \quad \text{für } x > 0 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \cos\big(\sin(x^2)\big) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Sind $D, E \subseteq \mathbb{R}$ offen und ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ mit $f(D) \subseteq E$ sowie $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(x_0)$, so ist $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$. Dies ist die sog. *Kettenregel*.

B **Aufgabe 4:** (Mittelwertsatz, $3 + 3$ Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung, dass gilt:

(i) Für alle $x > 0$ ist $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ ist $e^x (y - x) < e^y - e^x < e^y (y - x)$.

Aufgabe 5: (Stetige Fortsetzbarkeit)
Seien $a < b$ und $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to x_0} f(x)$ für $x_0 \in \{ a, b \}$ existiert.