Übungsblatt 12

Analysis I, WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 16.01.2018, Abgabe: Di., 23.01.2018

B **Aufgabe 1:** (Grenzwerte, $2+2+2+2+2+2$ Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - xe^{x/2}-1}{x^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\Big(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\log(x)\Big)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)+2x}{\cos(x)-2x}$

B **Aufgabe 2:** (Differenzierbarkeit von Reihen, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{1+4^k x^2},\qquad x\in\mathbb{R},$$

beliebig oft differenzierbar ist und berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $g(t)=(1+t^2)^{-1}$ für $t\in\mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass $g^{(n)}(t)=p_n(t)\cdot(1+t^2)^{-(n+1)}$ mit einem Polynom p_n vom Grad n ist. Folgern Sie die Beschränktheit von $g^{(n)}$ auf $\mathbb{R}$ und dann, dass f beliebig oft differenzierbar ist.

B **Aufgabe 3:** (Arcusfunktionen, 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Ableitungen von arcsin, arccos : $(-1,\,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ und arctan, arccot : $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass arcsin und arctan streng monton wachsend sind, und, dass arccos und arccot streng monoton fallend sind.

Aufgabe 4: (Differenzierbarkeit und Analytizität)
Geben Sie eine C^∞-Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ an, für die kein $r>0$ existiert mit

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\qquad |x|<r,$$

obwohl die angegebene Potenzreihe für jedes $r>0$ gleichmäßig in $(-r,\,r)$ konvergiert.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 2 auf Blatt 11.