Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An1: Mathematische Grundlagen

Stichworte: Mengen, Aussagen, Quantoren, Abbildungen, vollständige Induktion

Literatur: [Hoff], Kapitel 1.1 – 1.3 und 1.5 auf S. 30–33.
Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch
Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure,
s. auch die Literaturangaben auf der Webseite der Vorlesung zur Analysis I.
In diesem Buch finden Sie bestimmte Skriptteile ausführlicher aufgeschrieben.

1.1. Bedienungsanleitung der Vorlesung "Analysis I":

- Vor jedem Termin erscheint auf der Webseite kurzfristig ein neues Kurz-Skriptteil zur nächsten Vorlesungssitzung. Sie können einen Vorab-Blick hineinwerfen.
- Besuchen Sie unbedingt die Vorlesungstermine! Das Skript wird dort ausführlich erklärt, erläutert, entwickelt und veranschaulicht. Der Stoff ist ohne den zugehörigen mündlichen Ergänzungen nicht zu erfassen.
- Lesen Sie zusätzlich ergänzende Literatur im Selbststudium, etwa die angegebene Literatur, was hier häufig das Buch [Hoff] ist.
- Überlegen Sie selbständig die angegebenen Übungsvorschläge, die mit dem Übungssmiley ü markiert sind. Sprechen Sie mit anderen darüber.
- Besuchen Sie regelmäßig das Tutorium / Ihre Übungsgruppe, um zu weitere Beispiele kennenzulernen und fleißig zu üben.
- Pro Kapitel finden Sie einen ausführlich aufgeschriebenen Beweis.
- Das Skript enthält einen Farbcode: gelb für Notationen / Bezeichnungen, rot unterstrichen werden Begriffdefinitionen und Namen wichtiger Sätze, blau unterstrichen werden Referenznummern und Zitierungen, grün unterstrichen werden Behauptungen / Sätze / Lemmas / Korollare, orange unterstrichen werden wesentliche Beweisideen.

1.2. <u>Einleitung</u>: Wir stellen die grundlegensten Begriffe der Mathematik dar, die aus der Aussagenlogik und naiven Mengenlehre stammen. Wir führen Abbildungen und ihre wichtigsten Eigenschaften ein, und erklären das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

1.3. <u>Def.</u>: Eine <u>Menge</u> ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. (G. Cantor 1895)
Die Objekte heißen <u>Elemente</u>. <u>Notation</u>: $x \in M$, bzw. $x \notin M$ (für das Gegenteil von $x \in M$)

1.4. <u>Bsp.</u>: $\{a, b, \ldots, z\}$ lateinisches Alphabet, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen,
$\{$rot, grün, blau$\}$ einige Farben, $1 \in \mathbb{N}$ ist wahr, $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ ist falsch

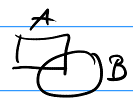
$M := \{\ldots\}$ eine Menge ist durch ihre Elemente definiert.
Die Menge ohne Elemente heißt <u>leere Menge</u>, Notation: $\emptyset$

1.5. <u>Bem.</u>: $A = B$:$\Leftrightarrow$ A enthält genau dieselben Elemente wie B, (und umgekehrt).
Bsp.: $\{1, 3, 7\} = \underbrace{\{3, 1, 1, 7, 1, 3, 1\}}_{\text{Reihenfolge und Mehrfachnennung irrelevant}}$.

1.6. <u>Das Herstellen von neuen Mengen aus Mengen</u>:

a) <u>Aussondern</u>: $T := \{a \in A;\ a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

b) aus Mengen A und B lassen sich bilden:



$A \cap B = \{x \in A;\ x \in B\}$ (<u>Schnittmenge</u>)

$A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$ (<u>Vereinigungsmenge</u>)

$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$ (<u>Differenzmenge</u>)

$A \subseteq B$: $\forall a \in A: a \in B$, entspricht $B \supseteq A$ $\ulcorner a \in A \Rightarrow a \in B \lrcorner$
(<u>Teilmengenzeichen</u>)

$A \subsetneq B$: $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (<u>echte Teilmenge</u>)

c) <u>Potenzmenge von A</u>: $\mathcal{P}(A) := \{B;\ B \subseteq A\}$ (Menge aller Teilmengen von A)
$\mathcal{P}(\emptyset) := \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Bsp.: $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$\{1\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$, $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$
$\{\{1\}\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2\})$

d) <u>Produktmenge</u>: $A \times B := \{(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$

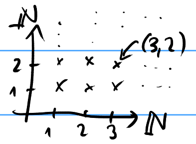
$A \times B$ ← <u>kartesisches Produkt</u>; (a,b) ← <u>geordnete Paare</u>

⌜andere Darstellung: $\binom{a}{b}$ statt (a,b)⌟

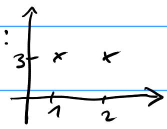
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$ ← Reihenfolge relevant

Bsp.:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:



$\{1,2\} \times \{3\}$:



Haben $\{1,2\} \times \{3\} = \{(1,3), (2,3)\}$,

$\{2,3\} \times \{\pi, 1, 7\} = \{(2,\pi), (2,1), (2,7), (3,\pi), (3,1), (3,7)\}$

Haben $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (2,1), (2,2), (2,3), \ldots, (3,1), \ldots \vdots \ldots\}$ ← unschön viele Pünktchen! Besser: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b);\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$.

e) <u>Verallgemeinerung</u>: Sei $n \geq 1$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen.

Def. $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times \ldots \times A_n$

$:= \{(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n);\ a_j \in A_j\},\ j = 1, \ldots, n.$

a_j ← <u>j-te Komponente</u>

$(a_1, \ldots, a_n)$ ← <u>n-Tupel</u>, die Reihenfolge der Komponenten ist relevant (3-Tupel: "Tripel", 2-Tupel: "Paare")

verkürzte Schreibweise bei $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ mal}} =: A^n$.

Übungs-Smiley →

1.7. Ü: Seien $A = \{1, 2, 4, 7\}$, $B = \{3, 9, 13, 4, 2\}$, $C = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ gerade}, n < 10\}$, $D = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ gerade} \Rightarrow n > 10\}$, $E = \mathbb{N} \setminus C$.

1. Bilden Sie die Mengen: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C \cup D$, $D \setminus E$, $A \cap D$, $A \times C$, ...
2. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind:
   a) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, b) $\{6, 8\} \subseteq C$, c) $A \cap D \subseteq \{1, 2, \ldots, 9\}$, d) $\{3, \{3, 9\}\} \subseteq B$,
   f) $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x = 4$, g) $1 \in C$, h) $D \neq E$, i) $\emptyset \in B$.

1.8. <u>Def.</u>: A, B heißen <u>disjunkt</u>, wenn $A \cap B = \emptyset$.

1.9. <u>Notation</u>: Die Anzahl der Elemente von A schreiben wir als $\#A$.

Bsp.: $\#\{7, 8, 9\} = 3$, $\#\{\text{rot}, 0, \{2,3\}, -i\} = 4$, $\#\emptyset = 0$, $\#\{\emptyset\} = 1$, ...

1.10 <u>Satz</u>: Für beliebige Mengen A, B, C gelten:

a) $\emptyset \subseteq A$, b) $A \cap B \subseteq A$, c) $A \subseteq A \cup B$, d) $A \subseteq A$, e) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq A$,

f) wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ gelten, dann gilt auch $A \subseteq C$.

1.11. Aussagen: Eine Aussage ist ein Gebilde, von dem man entscheiden kann, ob es wahr oder falsch ist. Eine Aussageform ist ein Gebilde, das erst durch Einsetzen eines Elements einer Menge in einen "Platzhalter", nämlich einer Variablen, zu einer Aussage wird.

Bsp.: "$17 \in \mathbb{N}$" ist eine Aussage, "$x+3=8$" ist eine Aussagenform mit Variablen x.

1.12. Zusammensetzen von Aussagen: $P, Q, R, \ldots$ seien Aussagen.

(Konjunktion) $P \wedge Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q wahr sind.

(Disjunktion) $P \vee Q$ ist genau dann wahr, wenn P oder Q wahr sind.
(mit "oder" im nicht ausschließenden Sinne)

(Negation) $\neg P$ ist genau dann wahr, wenn P falsch ist.

(Implikation) $P \Rightarrow Q$ bzw. $Q \Leftarrow P$: ist genau dann wahr, wenn P falsch oder P und Q beide wahr sind.

(Bzw. $P \Rightarrow Q$ ist falsch, wenn P wahr und Q falsch ist.)

Bem.: $P \Rightarrow Q$ wird gelesen als "Wenn P, dann Q", "Aus P folgt Q", "P impliziert Q", "Q ist notwendig für P", "P ist hinreichend für Q"...

(Äquivalenz) $P \Leftrightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q beide wahr oder beide falsch sind.

Bem.: $P \Leftrightarrow Q$ wird gelesen als "P genau dann, wenn Q", "P und Q sind äquivalent", "P dann und nur dann, wenn Q"...

Bsp.:
- $n = 2 \Rightarrow 5 + n = 7$
- $\neg(3.14 \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow 3.14 \notin \mathbb{N}$
- $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$
- $x = 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} x \cdot y = 0$

1.13. Beispiele für allgemein gültige Aussagen, sogenannte Tautologien, sind:

a) Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $P \vee (\neg P)$

b) Gesetz der Kontradiktion: $\neg(P \wedge (\neg P))$

c) Gesetz vom Syllogismus: $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

d) Gesetz der doppelten Verneinung: $P \Leftrightarrow (\neg(\neg P))$

e) Gesetz der Kontraposition: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q \Rightarrow \neg P))$

1.14. **Quantoren:**

• **Existenzquantor:** Bsp.: Es gibt ein $x \in$ Tiere mit: x ist weiß und x ist ein Bär.

Schreiben: $\exists x \in \text{Tiere}: x \text{ weiß} \wedge x \text{ Bär}$.

Für eine Aussageform $A(x)$, M Menge und $x \in M$, bedeutet

$\exists x \in M: A(x)$: Es existiert (mindestens) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt / wahr ist.

Bsp.: $\exists x \in \mathbb{N}: x + 2 = 5$

• **Allquantor:** Bsp.: Alle Tiere sind weiß.

Schreiben: $\forall x \in \text{Tiere}: x \text{ weiß}$

$\forall x \in M: A(x)$: Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$.

Bsp.: $\forall x \in \mathbb{N}: x + 2 \neq 1$.

Variante des Existenzquantors:

$\exists! \, x \in M: A(x)$: Es existiert (genau) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt/wahr ist (d.h. nur eins und kein anderes).

1.15. **Grundregeln für Quantoren:**

a) $\forall x \in M: A(x) \iff \neg(\exists x \in M: \neg A(x))$

b) $\exists x \in M: A(x) \iff \neg(\forall x \in M: \neg A(x))$

c) $\forall x \in M \; \forall y \in N: A(x,y) \iff \forall y \in N \; \forall x \in M: A(x,y)$

d) $\exists x \in M \; \exists y \in N: A(x,y) \iff \exists y \in N \; \exists x \in M: A(x,y)$

e) $\exists x \in M \; \forall y \in N: A(x,y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall y \in N \; \exists x \in M: A(x,y)$

⇝ Negation von Aussagen mit mehreren Quantoren z.B.:

$$\neg(\forall x \in M \; \exists y \in N: A(x,y)) \iff \exists x \in M \; \neg(\exists y \in N: A(x,y))$$
$$\iff \exists x \in M \; \forall y \in N: \neg A(x,y)$$

Bsp.: $T = \{\text{Töpfe}\}$, $D = \{\text{Deckel}\}$, $P(x,y) :\iff$ Auf Topf x passt der Deckel y.

Dann: $\forall x \in T \; \exists y \in D: P(x,y)$ "Auf jeden Topf passt ein Deckel."

Verneinung: $\neg(\forall x \in T \; \exists y \in D: P(x,y)) \iff \exists x \in T \; \forall y \in D: \neg P(x,y)$.

heißt "Es gibt einen Topf, auf den passt kein Deckel".

1.16. **Abbildungen:** Seien A, B Mengen.

Def.: $f: A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$

$a \mapsto f(a)$ Zuordnungsvorschrift, die jedem El. von A genau ein El. von B zuordnet,

d.h. $\forall a \in A\ \exists!\ b \in B : b = f(a)$.

Ganz genau formuliert:

• Eine Abbildung f ist ein Tripel (A, B, R) mit einer Menge A (genannt Definitionsmenge) auch Bereich

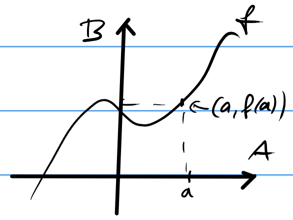
und einer Menge B (genannt Wertemenge/Wertebereich)

und einer Menge $R \subseteq A \times B$ mit $\forall a \in A\ \exists!\ b \in B : (a, b) \in R$.

[Anstelle $(a,b) \in R$ schreiben wir dann $f(a) = b$.]

Die Menge $\Gamma(f) := R = \{(a, f(a)) \in A \times B\}$

heißt der Graph bzw. das Schaubild von f.



Bsp.: $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m + n$ ist Abbildung | $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto \pm n$ ist keine Abb.

1.17 Sei $f: A \to B$ eine Abbildung.

• Def.: Ist $A' \subseteq A$, so heißt $f(A') := \{f(a) \in B;\ a \in A'\}$ das Bild von A' (unter f).

Ist $B' \subseteq B$, so heißt $f^{-1}(B') := \{a \in A;\ f(a) \in B'\}$ das Urbild von B' (unter f)

→ keine Umkehrabbildung!

• Def.: $f = g : C \to D \ :\Leftrightarrow A = C,\ B = D$, gleiche Zuordnungsvorschrift

• $f_{/A'} : A' \to B$, $a \mapsto f(a)$ für $A' \subseteq A$ ist die Einschränkung von f auf A'

• Ist $f: A \to B$ geg., heißt $g: \tilde{A} \to B$ eine Fortsetzung von f auf $\hat{A}$,

falls $A \subseteq \tilde{A}$ und $f = g_{/A}$.

• Eine Abb. $A \to B$ heißt insbesondere dann Funktion, wenn B eine Menge reeller oder komplexer Zahlen ist.

1.18. **Eigenschaften von Abbildungen:** Sei $f: A \to B$ eine Abb.

• f heißt injektiv (eineindeutig), falls $\forall a, \hat{a} \in A : f(a) = f(\hat{a}) \Rightarrow a = \tilde{a}$

• f heißt surjektiv (auf), falls $f(A) = B$, d.h. $\forall b \in B\ \exists a \in A : f(a) = b$.

• f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

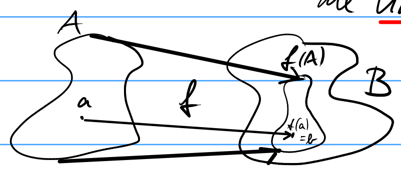
1.19. **Bsp.:** • $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto n+1$ ist injektiv, nicht surjektiv

• $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$, $n\mapsto \begin{cases}0, & \text{falls } n=0,\\ n-1, & \text{falls } n\ge 1,\end{cases}$ ist surjektiv, nicht injektiv

• $id_A: A\to A$, $a\mapsto a$, ist bijektiv ("Identitätsabbildung von A")

1.20. **Umkehrabbildungen:**

Sei $f:A\to B$ injektiv, dann heißt $f^{-1}: f(A)\to A$, $b\mapsto (a \text{ mit } f(a)=b)$ die Umkehrabbildung von f. "vertauschen a und b"



Bem.: $f^{-1}:f(A)\to A$ ist bijektiv, $(f^{-1})^{-1}=f$.
Vgl. [Hoff, S.17].

⚠ f^{-1} hat zwei Bedeutungen: 1.) $f^{-1}(B')$
2.) $f^{-1}(b)$, falls f injektiv

1.21 Notation: $\mathcal{F}(A,B) := \{f:A\to B \text{ Abb.}\}$

Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion:

1.22. **Def.:** $\mathbb{N} := \{1, \underbrace{1+1}_{=:2}, \underbrace{2+1}_{=:3}, \underbrace{3+1}_{=:4}, \dots\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}\cup\{0\}\cup -\mathbb{N}$

Für $\ell\in\mathbb{R}$ schreibe $\mathbb{N}_{\ge \ell}$, $\mathbb{Z}_{\ge\ell}$, $\mathbb{R}_{\ge\ell}$, ... mit naheliegender Bedeutung

1.23. Vollständige Induktion (VI): Beh. $\forall n\in\mathbb{N}: A(n)$, z.B. $\forall n\in\mathbb{N}: 1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

Die vollst. Ind. ist ein Beweisverfahren, das eine Beh. dieser Form schrittweise zeigt:

1. Schritt: Induktionsanfang: Zeige: $A(1)$ gilt.

2. Schritt: Induktionsschritt: Zeige: $\forall k\in\mathbb{N}: (\underbrace{A(k)}_{\text{Ind.vor., wird im Beweis benutzt}} \Rightarrow A(k+1))$.

3. Schritt: Induktionsschluss: $\forall n\in\mathbb{N}: A(n)$.

Bsp.: Beh.: $\forall n\in\mathbb{N}: \underbrace{1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}_{\text{hier Aussage "}A(n)\text{"}}$. [z.B. $1+2+3=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$, $1+2+\dots+100=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101=5050$]

Bew.: 1. $A(1)$ gilt: Denn $1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$ ✓

2. Ind. vor. $A(k)$ gilt $\Rightarrow 1+2+\dots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$. Dann gilt $A(k+1)$,

denn $(\underbrace{1+2+\dots+k}) + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$

$= (k+1)\cdot(\frac{1}{2}k+1) = (k+1)\cdot\frac{1}{2}(k+2) = \frac{1}{2}(k+1)(k+1+1)$ ✓

Anschaulich: $\underset{\text{Ind. Anfang}}{A(1)} \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow A(4) \Rightarrow A(5) \Rightarrow \dots$ $\square$

Schritt $k=1$ Schritt $k=2$ Schritt $k=3$ Schritt $k=4$

1.24. Modifikation der VI (vollständigen Induktion):

Sei $\ell \in \mathbb{Z}$. 1. (IA) $A(\ell)$ gilt.

2. (IS) $\forall k \geq \ell: A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

3. Ind. schluss: $\forall n \geq \ell: A(n)$ gilt.

$\rightsquigarrow$ Beweis dieser Modifikation: Wende (VI) in 1.23 an auf die Aussage $B(n) := A(\ell+n-1)$.

1.25. Bsp.: $A(n) :\Leftrightarrow$ Die Anzahl Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen drei auszuwählen, beträgt $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

Bew. (ausführlich aufgeschrieben):

1. (IA) $A(3)$ gilt, denn es gibt $1 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeit der "Auswahl".

2. (IS) Es gelte die Ind. Vor.: $\forall k \geq 3: A(k)$.

Nun sollen drei aus $k+1$ El. ausgewählt werden, man hat

- Laut Ind. vor. $\frac{1}{6}k(k-1)(k-2)$ viele Auswahlmöglichkeiten, drei El. aus Nr. $1, \dots, k$ zu wählen,
- und bei Wahl von El. Nr. $k+1$ noch $\frac{1}{2}k(k-1) = 1+2+\dots+(k-1)$ viele Möglichkeiten, zwei El. aus Nr. $1, \dots, k$ auszuwählen. (Vgl. Bsp. in 1.23)

Dies macht zusammen $\frac{1}{6}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{2}k(k-1) = k \cdot (k-1) \cdot \left(\frac{1}{6}(k-2) + \frac{1}{2}\right)$

$= k \cdot (k-1) \cdot \frac{1}{6}(k-2+3) = \frac{1}{6} \cdot (k+1)(k+1-1)(k+1-2)$

viele Möglichkeiten. Es folgt also $A(k+1)$.

3. Laut Induktionsprinzip (VI), Modifikation 1.24, folgt die Behauptung $\forall n \geq 3: A(n)$. □

1.26. Bsp. für einen Induktionsbeweis mit Fehler / Scheinbeweis:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Leftrightarrow$ je n reelle Zahlen sind gleich.

"Bew." durch VI: (IA) $n=1$: $A(1)$ gilt ✓

(IS) Zeigen $A(k) \Rightarrow A(k+1)$: $\{\underbrace{a_1, \underbrace{a_2, \dots, a_k}_{\text{gleich nach Vor.}}, a_{k+1}}\}$ — gleich nach Vor. $\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$ ✓

"□"

Fehler im Beweis: Im (IS) wird stillschweigend $k \geq 2$ angenommen.