Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 10: Funktionsgrenzwerte

[Hoff, §3.4.1, §4.8]

Stichworte: Grenzwert einer Funktion, Links-/Rechtsseitiger Limes, gleichmäßige Stetigkeit, Satz über Umkehrfunktionen, Logarithmus

---

10.1. **Einleitung:** Für einen Häufungspunkt a im Definitionsbereich einer Funktion f definieren wir den Funktionsgrenzwert von $f(x)$ für $x \to a$. Mit der zusätzlichen Bedingung $x > a$ ist dies der rechtsseitige Limes, für $x < a$ der linksseitige. Bestimmte Divergenz kann entsprechend definiert werden. Weiter führen wir den Logarithmus ein.

10.2. **Def.:** Sei $M \subseteq \mathbb{K} \ni a$. Dann heißt a ein Häufungspunkt (HP) von M, falls $\forall \varepsilon > 0: \left(U_a^\varepsilon \setminus \{a\}\right) \cap M \neq \emptyset$.

10.3. **Bsp.:** Sei $M = [0,1[\cup \{2\}$.

$\rightsquigarrow a = 1$ ist HP von M, $a \notin M$ $\qquad \rightsquigarrow a = 1 + 10^{-42}$ kein HP von M, $a \notin M$

$\rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$ ist HP von M, $a \in M$ $\qquad \rightsquigarrow a = 2$ kein HP von M, $a \in M$

10.4. **Def.:** Sei $M \subseteq D \subseteq \mathbb{K} \ni b$, $f: D \to \mathbb{K}$, a ein HP von M.

Wir definieren: $f(x) \longrightarrow b$ (bei $M \ni x \to a$) $\iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M \setminus \{a\}: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

Sprechweise: $f(x)$ konvergiert bei/für $x \to a$ gegen b.

Folgenformulierung: $f(x) \longrightarrow b$ (bei $M \ni x \to a$)

$\iff \left((x_n) \text{ in } M, \forall x_n \neq a\right): \left(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b\right)$

Stetigkeitsformulierung: $\overset{\text{Def.}}{\iff}$ $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in M \setminus a, \\ b, & \text{falls } x = a, \end{cases}$ $\quad (\rightsquigarrow \text{i.a. } a \notin M)$

ist stetig in a.

10.5 **Def.:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $M := D \cap]a, \infty[$.

rechtsseitiger Limes: $f(a+) := f(a+0) := \lim\limits_{x \to a+} f(x) := \lim\limits_{x \to a\downarrow} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in M}} f(x)$

linksseitiger Limes: $f(a-)$ analog.

Bem.: Falls $M = \emptyset$: $f(x) \to b$ (bei $x \to a$).

10.6. Bsp.: 1.) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(n+) = n$, $f(n-) = n-1$.

2.) Vorzeichenfunktion: $f(x) = \mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ "Signum"

Dann: $\lim\limits_{0<x\to 0} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{0>x\to 0} f(x) = -1$.

3.) $f(z) := \frac{e^z - 1}{z}$, $z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$. ⌜ $\left| \frac{e^z - 1 - z}{z} \right| \overset{8.5,\ n=1}{\leq} \frac{1}{|z|} \cdot \frac{|z|^2}{2} \cdot \frac{3}{3-|z|} \overset{|z|\leq 1}{\leq} |z| \cdot \frac{3}{4} \xrightarrow{z\to 0} 0.$ ⌟

$\Rightarrow f(z) \to 1$.

4.) $f(z) := \frac{z^n - 1}{z - 1}$, $z \neq 1$. Dann: $f(z) \xrightarrow{z\to 1} n$.

⌜ $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} z^j \xrightarrow{z\to 1} n \cdot 1 = n$ ⌟

Gleichmäßige Stetigkeit

Hatten die ε-δ-Definition für Stetigkeit:

$\forall \varepsilon > 0\ \forall a \in D_f\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f: \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Beh.: δ hängt (unter Umständen) von a ab.

Bsp.: $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig. Betr. etwa $a = n \in \mathbb{N}$.

Für $\delta := \min(1, \frac{\varepsilon}{2n+1})$ gilt dann $|f(x) - f(n)| = |x^2 - n^2| = |x-n| \cdot \underbrace{|x+n|}_{<(2n+1)} < \varepsilon$

für $|x-n| < \delta$, weil $|x+n| = |x-n+2n| \leq |x-n| + 2n < \delta + 2n \leq 2n+1$.

Eine besondere Stetigkeit liegt vor, wenn δ nicht von a abhängt wie folgt.
(Dies wird später für das Integrieren von Funktionen eine Rolle spielen.)

10.7. Def.: f heißt gleichmäßig stetig, falls

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a, x \in D_f: \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Quantoren vertauscht! Vgl. Bsp. in 1.15.

10.8. Satz: Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Beh.: f stetig $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig.

Bew.: Sonst: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists a, x \in D_f: |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wähle $\delta = \frac{1}{n}$: $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$,

OE $x_n \to x_0 \in [a,b]$ $\Rightarrow y_n \to x_0$ $\Rightarrow \underbrace{|f(x_0) - f(x_0)|}_{=0} \geq \varepsilon$, ↯. □

10.9. **Bestimmte Divergenz bei Funktionen:**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (unten) nicht beschränkt.

Dann def.: $f(x) \longrightarrow b$ (bei $M \ni x \longrightarrow \underset{-\infty}{\infty}$)

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists k \in \mathbb{R}: \; \underset{x<-k}{x > k} \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

$\leadsto$ Zurückführung auf Folgen klar, vgl. 6.11

$\leadsto$ Zurückführung auf Stetigkeit: Sei $g(x) := \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x>0, \; \frac{1}{x} \in M, \\ b, & x=0. \end{cases}$

Dann gilt: $f(x) \to b$ (bei $M \ni x \to a$) $\Longleftrightarrow$ g in 0 stetig.

10.10. 10.4 ist auch äquivalent zu: " $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_a^\delta, x \neq a: |f(x) - b| < \varepsilon$.

Dies lässt sich zu Aussagen über die bestimmte Divergenz von $f(x)$ übertragen wie folgt.

Setze für Ästheten: $U_\infty^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R};\; x > \frac{1}{\varepsilon}\} = \,]\frac{1}{\varepsilon}, \infty[,$

$U_{-\infty}^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R};\; x < -\frac{1}{\varepsilon}\} = \,]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[.$

Damit gilt dann:

$f(x) \to \infty$ (bei $M \ni x \to a$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_a^\delta, x \neq a: f(x) > k$

$f(x) \to -\infty$ (bei $M \ni x \to a$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_a^\delta, x \neq a: f(x) < k$

$f(x) \to \infty$ (bei $M \ni x \to \infty$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_\infty^\delta: f(x) > k$

$f(x) \to -\infty$ (bei $M \ni x \to \infty$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in U_\infty^\delta: f(x) < k$

entsprechend $-\infty$ für $x \to -\infty$

10.11. Bsp.: 1.) $\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$. **Bew.:** $\frac{e^x}{x^n} \underset{(x>0)}{\geq} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$.

2.) Auf $]0, \infty[$ gilt: $\ln(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $\ln(x) \xrightarrow{x\to 0} -\infty$ (vgl. 10.16/17).

3.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $a_j, b_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$R(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k} = x^{m-n} \cdot \frac{a_m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j x^{j-m}}{b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-n}} = x^{m-n} \cdot \frac{a_m + (\to 0)}{b_n + (\to 0)}$$

$$\xrightarrow{x\to\infty} \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & \text{für } m = n, \\ \operatorname{sign}\left(\frac{a_m}{b_n}\right) \cdot \infty, & \text{für } m > n, \\ 0, & \text{für } m < n. \end{cases}$$

↱ Erinnerung an 9.5

10.12 **Bezeichnung:** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$.

f heißt $\frac{\text{isoton}}{\text{antiton}}$ $:\Leftrightarrow \left(x_1 < x_2 \text{ in } D \Rightarrow f(x_1) \ \substack{\leq \\ \geq}\ f(x_2) \text{ in } \mathbb{R} \right)$

f heißt streng $\frac{\text{isoton}}{\text{antiton}}$ $:\Leftrightarrow \left(x_1 < x_2 \text{ in } D \Rightarrow f(x_1) \ \substack{< \\ >}\ f(x_2) \text{ in } \mathbb{R} \right)$

10.13 **Satz über Umkehrfunktionen:**

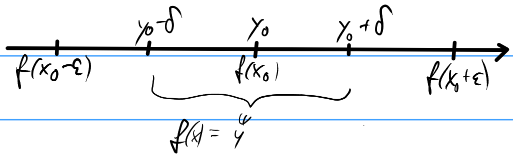
Vor.: $I \subseteq \mathbb{R}$ echtes Intervall (d.h. I enthält ≥ 2 Punkte),
$f: I \to \mathbb{R}$ ~~stetig~~, streng isoton.

Beh.: 1) Es ex. $f^{-1}: f(I) \to I$, streng isoton und stetig.
2) f stetig $\Rightarrow f(I)$ Intervall. (schon aus 9.31 bekannt, folgt mit ZWS)

Bew.: 1): • f streng isoton: $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ $\rightsquigarrow$ insb. f injektiv
$\Rightarrow \exists f^{-1}: f(I) \to I$: $f^{-1}(f(x))$ $\ $ $f^{-1}(f(y))$, d.h. f^{-1} streng isoton.

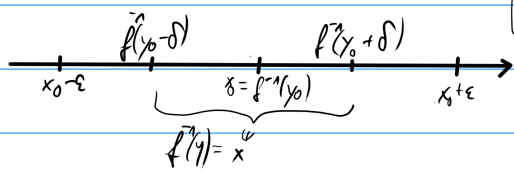
• Sei f stetig in x_0 (nicht Randpunkt von I)
$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$: $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$. Sei $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$.

$\rightsquigarrow \exists\, \delta > 0$:



$\leftarrow$ nämlich wähle
$\delta := \min\left(f(x_0) - f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)\right)$
$\rightsquigarrow \delta > 0$

$\rightsquigarrow$ f^{-1} anwenden:
(f^{-1} streng isoton)



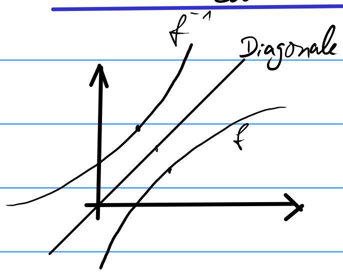
$\rightsquigarrow$ $y_0 - \delta < \underbrace{f(x)}_{=y} < y_0 + \delta$
$\Rightarrow f(x_0-\varepsilon) \leq y \leq f(x_0+\varepsilon)$
$\Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

Somit gilt:

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \quad \Rightarrow f^{-1} \text{ ist stetig.} \qquad \square$$

Bem.: In 1) kann auf die Vor. "f stetig" verzichtet werden!
Vgl. auch [Heuser, Satz 37.1].

10.14 **Anschauung:**



Spiegelung an der Diagonale $(x,x) \in \mathbb{R}^2$

Graph: $\Gamma_f = \{(x, f(x));\ x \in I\}$
$\Gamma_{f^{-1}} = \{(f^{-1}(y), y);\ y \in f(I)\}$

10.15. Anwendungsbsp.:

$\exp: \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist streng isoton, stetig, $\exp(\mathbb{R}) =]0,\infty[$

$x \in \mathbb{R}_{>0}$: $\exp(x) \geq x$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{x}$.

10.16. Def.: $\ln := \exp^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ heißt Logarithmusfunktion.

(schreibe auch log für ln)

10.17. Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

0) ln ist streng isoton und stetig

1) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

2) $\forall x, y \in]0,\infty[$: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ (Funktionalglg. von ln)

Bew.: $x = e^u, y = e^v \Rightarrow \ln(xy) = \ln(e^{u+v}) = u + v = \ln(x) + \ln(y)$. □

3) $\forall x \in]0,\infty[, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Bew.: Induktion: I.A.: $\ln(x^1) = 1 \cdot \ln(x)$. ✓

I.S.: $\ln(x^{n+1}) = \ln(x \cdot x^n) = \ln(x) + \ln(x^n)$

$\stackrel{\text{I.V.}}{=} \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x)$. □

4) $\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$

Bew.: $0 = \ln(1) = \ln(x \cdot x^{-1}) = \ln(x) + \ln(x^{-1}) \stackrel{-\ln(x)}{\Rightarrow} -\ln(x) = \ln(x^{-1})$. □

5) $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x)$

Bew.: $\ln(x) = \ln((\sqrt[n]{x})^n) \stackrel{3)}{=} n \ln(\sqrt[n]{x}) \stackrel{|:n}{\Rightarrow} \frac{1}{n}\ln(x) = \ln(\sqrt[n]{x})$. □

10.18. Def. (allgemeine Potenz): Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ (Basis), $x \in \mathbb{R}$ (Exponent).

Dann ist $a^x := \exp(x \ln(a))$, Konsistent mit alter Def. 2.15(4), Bem. in 3.14:

Sei $x = n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^n_{(\text{neu})} = \exp(n\ln(a)) \stackrel{3)}{=} \exp(\ln(a^n)) = a^n_{(\text{alt})}$,

$a^{1/n}_{(\text{neu})} = \exp(\frac{1}{n}\ln(a)) \stackrel{5)}{=} \exp(\ln(a^{1/n})) = a^{1/n}_{(\text{alt})}$.

10.19. Somit gilt: $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$ (alle $x \in \mathbb{R}$, sogar $x \in \mathbb{C}$).

10.20. **Rechenregeln für (allgemeine) Potenzen:** Seien $a, b \in]0, \infty[$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann:

1) $a^x > 0$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.
Bew.: $a^x = \exp(x\ln(a)) > 0$, $\ln(a^x) = \ln(\exp(x\ln(a))) = x\ln(a)$. $\square$

2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
Bew.: $a^x \cdot a^y = \exp(x\ln(a))\cdot\exp(y\ln(a)) = e^{(x+y)\ln(a)} = a^{x+y}$. $\square$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$
Bew.: $(e^{x\ln(a)})^y \underset{\uparrow}{=} e^{xy\ln(a)} = a^{xy}$. $\square$
denn $u := e^{x\ln(a)}$ zeigt $u^y = e^{y\ln(u)} = e^{y\ln(e^{x\ln(a)})} = e^{yx\ln(a)\overbrace{\ln(e)}^{=1}}$

4) $a^x b^x = (ab)^x$
Bew.: $e^{x\ln(a)} \cdot e^{x\ln(b)} = e^{x(\ln(a)+\ln(b))} = e^{x\ln(ab)} = (ab)^x$. $\square$

10.21. **Allgemeiner Logarithmus:** Sei $a, x \in]0, \infty[$, $a \neq 1$.
Dann def. $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, heißt Logarithmus zur Basis a.

10.22. Haben: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$
Denn: $x = a^y \Leftrightarrow x = e^{y\ln(a)} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} \ln(x) = y\ln(a) \Leftrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x)$. $\square$

10.23. Umrechnung von Logarithmen zu verschiedenen Basen: Sei $a, b, x \in]0, \infty[$, $a \neq 1 \neq b$.
Dann: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \log_b(x) = \underbrace{\log_a(b)}_{\text{Umrechnungsfaktor}} \cdot \log_b(x)$

bzw. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

10.24. Umrechnung von allgemeinen Potenzen zu verschiedenen Basen:
Sei $a, b \in]0, \infty[$, $a \neq 1 \neq b$, $x \in \mathbb{R}$.
Dann: $a^x = b^{\log_b(a^x)} = b^{x\log_b(a)}$.

10.25. Beh.: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.
Bew.: Für $|z| \leq 1$ zeigt 8.6(2), dass $\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{e^z-1-z}{z}\right| \leq \frac{3}{4}|z| \xrightarrow{z\to 0} 0$,
vgl. 10.6.(3) → also $\frac{z}{e^z-1} \xrightarrow{z\to 0} 1$, mit $z = \ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(1+0) = 0$ folgt insbesondere
dass $\ln(1+\frac{1}{n})^n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})-1} = \frac{z_n}{e^{z_n}-1} \xrightarrow[\text{d.h. } n\to\infty]{z_n\to 0} 1$, die Beh. $\square$