Vorlesung Analysis I

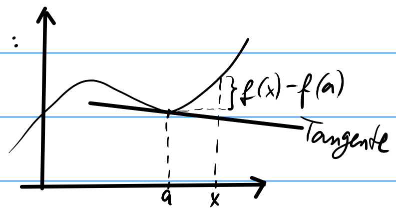
WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An11: Differenzierbarkeit

Stichworte: differenzierbar, Kriterien für Diff'barkeit, Tangenten, Ableitungsregeln, höhere Ableitungen [Hoff, §4.1–§4.3]

11.1. **Einleitung:** Wir führen den Begriff des Differenzierens ein.

Sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, Anschauung:



Bezeichnung: $\lim\limits_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{Differenzenquotient}}$ Differentialquotient

11.2. **Def.:** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a \in D \xrightarrow{f} \mathbb{K}$.

f heißt in a differenzierbar (kurz: diff'bar),

falls $\exists A \in \mathbb{K}: \; A = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, genannt: (erste) Ableitung an der Stelle a

Notation dann: $(Df)(a) := f'(a) := \frac{df}{dx}(a) := A$.

11.3. **Def.:** Sei $\emptyset \neq M \subseteq D$.

f heißt in M diff'bar $:\Leftrightarrow \forall c \in M: c$ ist HP von M und f in c diff'bar

f heißt diff'bar $:\Leftrightarrow$ f in D diff'bar

11.4. **Satz:** Äquivalent sind:

1) f in a diff'bar
2) $\exists\, h: D \to \mathbb{K}$ stetig in a: $f(x) = f(a) + h(x)\cdot(x-a)$
3) $\exists\, A \in \mathbb{K}$, $r: D \to \mathbb{K}$ stetig in a, $r(a) = 0$:
$$f(x) = f(a) + A\cdot(x-a) + r(x)\cdot(x-a).$$

Zusatz: In 2): $h(a) = f'(a)$, in 3): $A = f'(a)$.

Bew. (per Ringschluss):

(1) ⇒ (2):
$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{für } x \neq a, \\ f'(a) & \text{für } x = a, \end{cases}$$ ist stetig laut (1).

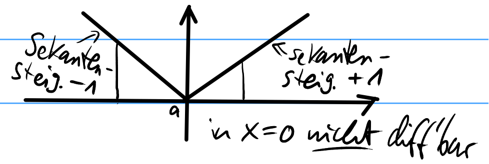
(2) ⇒ (3): $r(x) := h(x) - h(a)$ ist stetig laut (2), $r(a) = 0$,
wo $A = h(a)$ laut (2).

(3) ⇒ (1): $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} (A + r(x)) = A = f'(a)$.

$\square$

11.5. **Bem.:** 1.) Die Tangente an $(a, f(a))$, wobei f in a diff'bar, ist:
$t_a : \mathbb{K} \ni x \mapsto f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$,
Diff'barkeit $\Leftrightarrow \frac{f(x)-t_a(x)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} 0$.

2.) f diff'bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a, ist nach 11.4. 2) trivial.
$\not\Leftarrow$ Bsp.:
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig



3.) Trivialität: $a \in M \subseteq D$, a HP von M,
f in a diff'bar $\Rightarrow f_{|M}$ in a diff'bar.

4.) Grundregeln: Sei $a \in D$, $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{K}$, a HP von D, f, g in a diff'bar.
Beh.: i) $(f \pm g)$ ist in a diff'bar, $(f\pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$. → Linearität der Ableitung
ii) $\alpha \in \mathbb{K} \rightsquigarrow (\alpha f)$ in a diff'bar, $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.
iii) $(f\cdot g)$ diff'bar in a, $(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)\cdot g'(a)$
(Produktregel).

Bew.: Es sei $f(x) = f(a) + h(x)\cdot(x-a)$, $g(x) = g(a) + k(x)\cdot(x-a)$.

i): $(f\pm g)(x) = f(a) \pm g(a) + (h(x) \pm k(x))\cdot(x-a)$ nach (2) diff'bar,
$(f\pm g)'(a) = h(a) \pm k(a) = f'(a) \pm g'(a)$ nach Zusatz.

ii): $(\alpha f)(x) = \alpha f(a) + \alpha h(a)\cdot(x-a)$ nach (2) diff'bar,
$(\alpha f)'(a) = \alpha h(a) = \alpha f'(a)$ nach Zusatz.

iii): $(f\cdot g)(x) = f(a)g(x) + g(x)h(x)(x-a)$
$= f(a)g(a) + (f(a)k(x) + g(x)h(x))\cdot(x-a)$ nach (2) diff'bar,
$(f\cdot g)'(a) = f(a)k(a) + g(a)h(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ nach Zusatz. $\square$

11.6. Beispiele:

(1) $b \in \mathbb{K}$, $f := b$. Dann ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{b-b}{x-a} = \frac{0}{\neq 0} = 0$.

(2) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. Dann ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. (auch $n \in \mathbb{Z}$, vgl. 11.8.2.))

⌈Induktion: $n = 1$: $\frac{x-a}{x-a} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n x^{n-1}$

$= x^n (1+n) = (n+1) x^{(n+1)-1}$. ✓ □⌋

(3) $f(x) = e^x \Rightarrow f$ diff'bar, $f'(x) = e^x$.

Bew.: $\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} e^a \cdot 1 = e^a$ (laut 10.6.(3)) □

(4) $\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\right)' = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \nu x^{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu x^{\nu-1}$.

(5) Sei $x \in [0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Dann ist $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$, nicht diff'bar in $a = 0$.

Bew.: $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow{x \to a} \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $a \neq 0$. □

⌈Bem.: $\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2} a^{-1/2} = (x^{\frac{1}{2}})'_{|x=a}$⌋

11.7. Quotientenregel:

Vor.: $a \in D \xrightarrow[g]{f} \mathbb{K}$, a HP von D, $g(a) \neq 0$, f, g in a diff'bar.

Beh.: $\frac{f}{g}$ in a diff'bar und $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ in a. Merkregel: $\frac{NAZ - ZAN}{N^2}$

Anmerkung: g diff'bar in $a \Rightarrow g$ stetig in $a \overset{g(a) \neq 0}{\Rightarrow} g$ ohne Nst. nahe $a \Rightarrow a$ HP von $D_{f/g}$.

Bew.: Sei $x \in D_{f/g} \setminus \{a\}$. Dann ist

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\downarrow x \to a} \cdot g(a) - \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\downarrow x \to a} \cdot f(a) \right)$$

$$\xrightarrow{x \to a} \frac{1}{(g(a))^2} \cdot \left(f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a) \right).$$

11.8. Bsp.: 1.) $f = 1$: $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-1 \cdot g'}{g^2} = -\frac{g'}{g^2}$.

2.) $h(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \in \mathbb{K}^*$. Dann:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-(n-1)} = (x^{-n})'.$$

3.) Alle rationalen Funktionen sind diff'bar.

11.9. Kettenregel:

Vor.: $a \in D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{K}$, a HP von D, $b := f(a)$, f in a und g in b diff'bar.

Beh.: $g \circ f$ in a diff'bar und $(g \circ f)'(a) = \underbrace{g'(f(a))}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{f'(a)}_{\text{innere Abl.}}$.

Bew.: b ist HP von E, und es gilt:

$f(x) = f(a) + h(x) \cdot (x-a)$, $g(y) = g(b) + k(y) \cdot (y-b)$, h, k stetig.

Dann ist $(g \circ f)(x) = g(b) + k(f(x)) \cdot (f(x) - b) = g(f(a)) + \underbrace{k(f(x)) \cdot h(x)}_{\text{stetig in } a} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\text{diff'bar.}}$

$\Rightarrow (g \circ f)'(a) = k(\overbrace{f(a)}^{=b})\, h(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. □

11.10. 1. Bsp.: cos diff'bar und $\cos' = -\sin$, sin diff'bar und $\sin' = \cos$

Bew.: $\cos'(z) = \left(\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})'\right) = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin(z)$,

$\sin'(z) = -\cos'(z + \frac{\pi}{2}) = \sin(z + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = \cos(z)$. □

2. Bsp.: $a > 0 \rightsquigarrow (a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \underbrace{e^{x \ln(a)}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\ln(a)}_{\text{innere}} = a^x \underbrace{\ln(a)}_{=1 \Leftrightarrow a = e}$.

$\rightsquigarrow e^x$ ist die einzige Exponentialfkt. $\neq 0$, deren Abl. mit sich selbst übereinstimmt.

11.11. Rechtsseitige / Linksseitige Diff'barkeit in a:

Def.: Sei $a \in D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a HP in $D \cap [a, \infty[$, $f_{|D \cap [a,\infty[}$ sei in a diff'bar.
Dann heißt $f'_+(a) := (f_{|D \cap [a,\infty[})'(a)$ die rechtsseitige Ableitung von f in a,

analog $f'_-(a)$ die linksseitige Ableitung von f in a.

Bem.: f links- und rechtsseitig diff'bar in $a \Rightarrow f$ diff'bar in a.

11.12. Höhere Ableitungen: Sei $\mathbb{K} \supseteq D \ni a$, $D \xrightarrow{f} \mathbb{K}$.

Setzen $f^{(0)} := f$, $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$, falls möglich.

Nennen $f^{(n)}(a)$ die n-te Ableitung von f in a,

und f heißt n-mal(ig) differenzierbar in a, falls $f^{(n)}(a)$ ex.

Bezeichnung: $\frac{d^n}{dx^n} f(a) := D^n f(a) := f^{(n)}(a)$,

speziell: $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$.

11.13. Def.: f beliebig oft diff'bar $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists f^{(n)}$.