Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An12: Reelle Differenzierbarkeit

Stichworte: Umkehrfunktionen ableiten, lokales Min/Max/Extremum, Satz von Rolle, verallgemeinerter MWS, Monotoniekriterien, Satz von Darboux, Regel(n) von de l'Hôpital [Hoff, §4.4, §4.8, §4.11, §6.3]

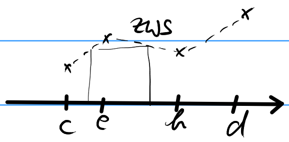
12.1. Einleitung: Wir zeigen einen Satz zur Ableitung von reellen Umkehrfunktionen. Die Zusammenhänge zwischen Extremwerte/Monotonie und Ableitung(svorzeichen) erschließen sich. Es folgt der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz, und ein Satz von Darboux. Zuletzt behandeln wir die Regel(n) von de l'Hôpital.

12.2. Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen:

Vor.: $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, I echtes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, f in a diff'bar, $f'(a) \neq 0$.

Beh.: f^{-1} in $b := f(a)$ diff'bar, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Bew.: • $f(I)$ ist IV. Es ist f streng monoton, da f auf $[c,d] \subseteq I$ streng monoton: Sei OE $f(c) < f(d)$. Für $e, h \in [c,d]$ mit $e < h$ gilt nicht $f(h) < f(e)$, sonst ↯ nach ZWS gegen Injektivität. ⌟



• Sei $J := f(I)$, d.h. b ist HP von J. Dann gilt: $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$

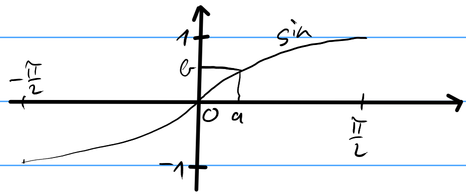
$b \neq \underset{\in J}{y_n} \to b$, $\quad x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b) = a$. [$f^{-1}$ stetig laut 10.13]

Dann: $$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)}. \quad \square$$

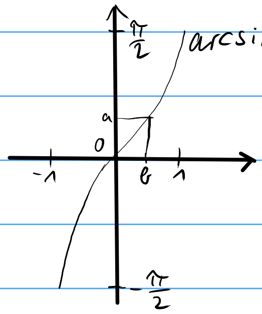
12.3. Bsp.: $\ln: b \in]0, \infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$ ist diff'bar, $\ln'(b) = \frac{1}{b}$.

Bew.: $b = e^a \Rightarrow \ln'(e^a) = \frac{1}{(e^a)'} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}$. $\square$

12.4. **Bsp.:** $\sin\restriction_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ streng isoton, und wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ ist $\sin\restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ streng isoton.



Behr.
$\sin: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, ist bijektiv.
Also: $\exists \sin^{-1} =: \arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, streng isoton, stetig, bijektiv.



$\arcsin'(b) = ?$
Für $b \in [-1,1]$ $\exists a \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ mit $\sin(a) = b$.
Dann ist: $\sin'(a) = \cos(a) \in [0,1]$,
also $\cos(a) \underline{\underline{=}} + \sqrt{1-\sin^2(a)} \Rightarrow \arcsin'(b) = \frac{1}{\sin'(a)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.

Analog gilt: $[0,\pi] \underset{\arccos}{\overset{\cos}{\rightleftarrows}} [-1,1]$, $\arccos'(b) \underline{\underline{=}} -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.
← schon in 10.25 gezeigt

12.5. **Satz über e:** **Beh.:** $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, allgemein: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.
Bew.: $x = 0 \Rightarrow 1 = 1$ ✓. Sei also OE $x \neq 0$, sei OE $1+\frac{x}{n} > 0$.

Dann: $\frac{\ln(1+\frac{x}{n}) - \ln(1)}{\frac{x}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \ln'(1) = 1$,

also: $n \ln(1+\frac{x}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} x$, d.h. $e^{\ln(1+\frac{x}{n})^n} \xrightarrow{x\to\infty} e^x$
$\Rightarrow (1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x$. □

12.6. **Bezeichnung:** f wächst in a $:\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap \mathcal{U}_a^\delta : x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$
und $x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$.

Analog: f fällt in a.

12.7. **Def. von Extremstellen:**
- f hat in a ein lokales (relatives) Maximum $:\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in D \cap \mathcal{U}_a^\delta : f(x) \leq f(a)$.
  Analog: f hat in a ein lokales (relatives) Minimum
- f hat in a ein lokales Extremum $:\Leftrightarrow$ f hat in a ein lokales Min. oder lokales Max.

Entsprechend: globales (absolutes) Maximum, Minimum, Extremum ⌜ohne δ, $\mathcal{U}_a^\delta$⌟

12.8. Bsp.: $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$ hat ein globales Maximum in x, falls $x \in \mathbb{Q}$,
hat ein globales Minimum in x, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12.9. Wachstumskriterium:

Vor.: a sei HP von D, f in a diff'bar, $f'(a) > 0$. $\ulcorner f'(a) < 0 \lrcorner$

Beh.: f wächst $\ulcorner$fällt$\lrcorner$ in a.

Bew.: Sei OE $f'(a) > 0$. Dann $\exists\, h$ in a stetig mit

$$f(x) - f(a) = \underbrace{h(x)}_{>0} \cdot (x-a).$$

$\ulcorner h(a) = f'(a) > 0 \Rightarrow$ OE $h > 0 \lrcorner$ vgl. 9.26

Vergleich beider Seiten ergibt die Beh. $\square$

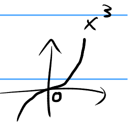
Bem.: Der Schluss, dass unter der Vor. folgen sollte, dass f monoton auf einem IV $\ni a$ sei, ist nicht korrekt! Vgl. Bsp. in Ü. Für Monotonie vgl. 12.15.

12.10. Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:

Vor.: $\exists\, \delta > 0: U_a^\delta \subseteq D$ $\ulcorner$d.h. a ist ein innerer Punkt von $D\lrcorner$, $f: D \to \mathbb{R}$,
f in a diff'bar, f hat in a lokales Extremum.

Beh.: $f'(a) = 0$. Bew.: Sonst OE $f'(a) > 0$, d.h. ↯ zu 12.9. $\square$

Anmerkungen:
- Die Vor. "innerer Punkt" ist nicht ersatzlos streichbar:
  Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, dann ist $f'(1) = 1 = f'(0)$.
- Die Umkehrung von 12.10. gilt nicht! Bsp.: $f(x) = x^3$, $a = 0$, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$,



$f(x) = x^3$ wächst in 0

12.11. Satz von Rolle:

Vor.: $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|_{]a,b[}$ diff'bar, $f(a) = f(b)$.

Beh.: $\exists\, \xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz vom Min./Max.

Bew.: $\exists\, t_1, t_2 \in [a,b]\ \forall x \in [a,b]: f(t_1) \leq f(x) \leq f(t_2)$ nach Satz 9.30
- Falls $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$, so ist f konstant und die Beh. trivial.
- Sonst OE $t_1 \notin \{a,b\}$, aus 12.10. folgt $f'(t_1) = 0$,
  und mit $\xi := t_1$ die Beh. $\square$

12.12. **Verallgemeinerter Mittelwertsatz (VMWS):**

Vor.: $a<b$, $[a,b] \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ diff'bar, $g'{\restriction}]a,b[$ ohne Nst.

Beh.: $\exists\, \xi \in]a,b[: \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Bew.: $g(b) \neq g(a)$, sonst $\lightning$ zum Satz von Rolle.

Sei $h := (f - f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g - g(a))$.

h ist stetig und diff'bar, $h(a) = 0 = h(b)$

$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in]a,b[: \quad h'(\xi) = 0 \Rightarrow$ Beh. □

12.13. **Spezialfall:** $g = id$ gibt den **Mittelwertsatz (MWS):**

Vor.: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ diff'bar.

Beh.: $\exists\, \xi \in]a,b[: f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)$.

12.14. **Kor.:** Vor. wie in 12.13 und $\exists\, A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq f' \leq B$ auf $]a,b[$.

($f \leq g :\Leftrightarrow \forall x \in D : f(x) \leq g(x)$ für $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$.)

Beh.: $\forall a \leq x_1 \leq x_2 \leq b : \quad A(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq B(x_2 - x_1)$.

Bew.: trivial mit 12.13. □

Speziell: $A = B = 0$ und $f' = 0$ auf $]a,b[\Rightarrow f$ konstant auf $]a,b[$

12.15. **Kor. (Monotoniekriterium):** Vor. wie in 12.13.

Beh.: (a) f isoton $\Leftrightarrow f'{\restriction}]a,b[\geq 0$, (a') f antiton $\Leftrightarrow f'{\restriction}]a,b[\leq 0$,

(b) f streng isoton $\Leftarrow f'{\restriction}]a,b[> 0$ (überall)

(b') f streng antiton $\Leftarrow f'{\restriction}]a,b[< 0$ (überall)

Bew.: (a): Sei $a \leq \alpha < \beta \leq b$, dann $\underset{12.13}{\rightsquigarrow} \exists\, \xi$ mit $\underbrace{f(\beta) - f(\alpha)}_{\overset{?}{\geq}0} = \underbrace{f'(\xi)}_{\Leftarrow\, \geq 0} \cdot \underbrace{(\beta - \alpha)}_{>0}$

„$\Leftarrow$": $\beta - \alpha > 0 \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) \geq 0 \Rightarrow f$ isoton.

„$\Rightarrow$": Nach Vor.: Differenzenquotient stets $\geq 0 \Rightarrow$ Differentialquotient stets ≥ 0

(a'): analog, ebenso (b), (b') mit „$\Leftarrow$". □

Bem.: In (b), (b') gilt „$\Rightarrow$" nicht!

Bsp.: $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ obwohl f streng isoton.

12.16. Satz von Darboux:

<u>Vor.:</u> $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar, $\gamma\in\mathbb{R}$ mit $f'(a)<\gamma<f'(b)$. analog: $[f'(a)>\gamma>f'(b)]$

<u>Beh.:</u> $\exists\, \xi\in\,]a,b[$ mit $f'(\xi)=\gamma$.

<u>Bew.:</u> [betr. $-f$ statt f für "$>$"-Variante]

Sei OE $f'(a)<\gamma<f'(b)$. Dann ist $h(x):=f(x)-\gamma x$ diff'bar,

$h'(a)=f'(a)-\gamma<0$ und $h'(b)=f'(b)-\gamma>0$.

Es genügt zu zeigen: h' hat Nullstelle ξ in $]a,b[$.

Es ist: $h'(a)<0 \Rightarrow h$ fällt in a,

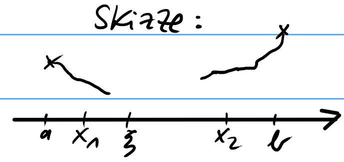
$h'(b)>0 \Rightarrow h$ wächst in b,

d.h. $\exists\, x_1,x_2$ mit $h(a)>h(x_1)$ und $h(x_2)<h(b)$.

Also $\exists\, \xi\in[a,b]$ mit $h(\xi)\le h(x)$ auf $[a,b]$. ⌜Satz vom Minimum⌟

Daraus folgt $h'(\xi)=0$ mit $\xi\in\,]a,b[$. $\square$

Skizze:



<u>Bem.:</u> • f' stetig in 12.16 $\Rightarrow$ Beh. folgt aus ZWS für f'

• f' stetig in 12.9 $\Rightarrow f|_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[}$ streng isoton für ein $\varepsilon>0$, falls $f'(a)>0$ ⌜wegen 9.26⌟

• <u>Def.:</u> f heißt stetig differenzierbar, falls f diff'bar und f' stetig.

12.17. Die Regeln von de l'Hôpital:

"$\frac{0}{0}$" bei $x\to a+$

(1) <u>Vor.:</u> $a<b\in\mathbb{R}$, $]a,b[\ \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}\ \mathbb{R}$, f,g diff'bar,

$f(a+)=0=g(a+)$, $g'|_{]a,b[}$ ohne Nullstelle, $\frac{f'(x)}{g'(x)}\xrightarrow{x\to a+} L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

<u>Beh.:</u> $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{x\to a+} L$. ⌜Analoges gilt für links- und beidseitige Limiten.⌟ ($x\to a-$, $x\to a$)

<u>Bew.:</u> Sei $\tilde f:[a,b[\,\to\mathbb{R}$, $\tilde f=f$ auf $]a,b[$, $\tilde f(a):=0$,

$\tilde g:[a,b[\,\to\mathbb{R}$, $\tilde g=g$ auf $]a,b[$, $\tilde g(a):=0$, $\tilde f$ und $\tilde g$ sind stetig.

Für $x\in\,]a,b[$ zeigt der VMWS 12.12: $\exists\, \xi_x\in\,]a,x[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tilde f(x)-\tilde f(a)}{\tilde g(x)-\tilde g(a)}=\frac{\tilde f'(\xi_x)}{\tilde g'(\xi_x)}\xrightarrow{x\to a+} L,$$ denn $x\to a+\Rightarrow \xi_x\to a+$. $\square$

"$\frac{0}{0}$" bei $x\to\infty$

(2) <u>Vor.:</u> $c\in\mathbb{R}$, $]c,\infty[\ \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}\ \mathbb{R}$, f,g diff'bar,

$f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \xleftarrow[x\to\infty]{} g(x)$, $g'|_{]c,\infty[}$ ohne Nullstelle, $\frac{f'(x)}{g'(x)}\xrightarrow{x\to\infty} L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

<u>Beh.:</u> $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{x\to\infty} L$. ⌜Analoges gilt für $x\to-\infty$.⌟

<u>Bew.:</u> Sei OE $c>0$, $\tilde f:\,]0,\tfrac{1}{c}[\,\ni x\mapsto f(\tfrac{1}{x})$, $\tilde g:\,]0,\tfrac{1}{c}[\,\ni x\mapsto g(\tfrac{1}{x})$.

Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tilde f(x)}{\tilde g(x)}$ und $\frac{\tilde f'(x)}{\tilde g'(x)}=\frac{f'(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})}=\frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}$, wende Regel (1) an. $\square$

12.18 **Bsp.:** • $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = 0.$

Denn: $0 \neq x \in]-\pi,\pi[$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \overset{\text{nach 12.17(1)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

$$\underset{\text{nach 12.17(1)}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{1+1-0} = 0.$$

• $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -2.$

Denn: $x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$, laden $\frac{\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -x^2\cdot\frac{2}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{-2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{-2}{(1-0)(1+0)} = -2.$$

12.19 **Bem.:** Die Regeln (1) und (2) ermöglichen die Auswertung von Ausdrücken der Form "$\frac{0}{0}$".
Auch Ausdrücke der Form "$0\cdot\infty$" möglich wegen $\underset{\to 0}{f}\cdot\underset{\to\infty}{g} = \frac{\overset{\to 0}{f}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{g}}}$
und ebenso der Form "$\infty-\infty$" wegen $\underset{\infty}{f}-\underset{\infty}{g} = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\to 0}{\frac{1}{gf}\to 0}$

12.20 **Bem.:** • Nicht immer sind die Regeln von de l'Hopital praktikabel. Für $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ käme man bei $\lim_{x\to 0+} x^\alpha\ln(x)$ auf $\frac{x^\alpha}{(\ln(x))^{-1}} \rightsquigarrow \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{-(\ln(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x}}$, komplizierter als vorher!
• Die Methode der Taylorentwicklung von Funktionen, s. späteres Kapitel, ist meist leichter als de l'Hôpital.

12.21 Es gilt noch die Regel

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" bei $x\to b$

(3) **Vor.:** $a\in\mathbb{R}$, $a<b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $]a,b[\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$ diff'bar,
$g'\restriction]a,b[$ ohne Nullstelle, $g(x)\to\pm\infty$ für $x\to b$,
$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\to b} L \in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Beh.: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to b} L$.

⌜Analog für rechts- und beidseitige Limiten⌟

Bew.: Zitieren [Heuser, Satz 50.1]. □

12.22 **Bem.:** Auf die Voraussetzung "$g'\restriction]a,b[$ ohne Nullstelle" kann nicht verzichtet werden, s. [Heuser, Aufgabe 11 zu Kapitel 50, "Eine Warnung von Otto Stolz"]⌟