Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

# An 13: Extremwertsuche, Konvexität

Stichworte: hinreichende Bedingungen für lokale Extrema und Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitung, Konvexität und Isotonie der Ableitung, Jensensche Ungleichung [Hoff, §4.11.1/2]

---

13.1. Einleitung: Wir besprechen Anwendungen der zweiten Ableitung: das sind hinreichende Kriterien zur Extremwertsuche bei reellen Funktionen sowie ein Kriterium zur Überprüfung der Konvexität/Konkavität einer reellen Funktion.

13.2. Situation zur Extremwertsuche:

Sei $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$, $a < \gamma < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Kennen aus 12.10. ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema:

Falls $f$ in $\gamma$ diff'bar, in $\gamma$ lokales Extremum $\Rightarrow f'(\gamma) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Falls $f$ in $\gamma$ diff'bar, so sind lokale Extremwertkandidaten: $a, b$, Nullstellen von $f'$.

13.3. Satz (hinreichende Kriterien für lokale Extrema):

(1) Vor.: $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ diff'bar, in $\gamma$ zweimal diff'bar, $f'(\gamma) = 0$, $f''(\gamma) < 0$.

Beh.: $f$ hat in $\gamma$ lokales Maximum.

(2) Vor.: $f : ]a,b[ \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{R}$ diff'bar, $f'|_{]a,\gamma[} \geq 0$, $f'|_{]\gamma,b[} \leq 0$.

Beh.: $f$ hat in $\gamma$ lokales Maximum.

analog: Minimum $\Leftrightarrow f''(\gamma) > 0$ in (1)

Bew.: Zu (2): $f|_{]a,\gamma]}$ isoton, $f|_{[\gamma,b[}$ antiton

$\Rightarrow f$ hat in $\gamma$ lokales Maximum.

Zu (1): $f''(\gamma) < 0 \Rightarrow f'$ fällt in $\gamma$

$\Rightarrow \exists\, \delta, \varepsilon > 0 : \; x \in [\gamma - \delta, \gamma], \; y \in [\gamma, \gamma + \delta]$

mit $f'(x) \geq f'(\gamma) = 0 \geq f'(y)$.

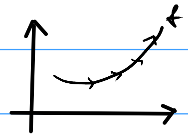
Aus (2) folgt die Beh. $\square$

Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9(x-1)^2 \rightsquigarrow f'(x) = 18(x-1)$, $f''(x) = 18 > 0 \Rightarrow \exists$ lok. Min. bei $x = 1$

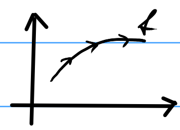
Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9(x-1)^4$, $f'(x) = 36(x-1)^3 \rightsquigarrow f'|_{]-10,1[} \leq 0$, $f'|_{]1,10[} \geq 0 \Rightarrow$ "

An 13
– 2 –

13.4. Wenn eine stetige Funktion eine "Linkskurve" macht, sprechen wir von einer konvexen Funktion, bei einer "Rechtskurve" von einer konkaven Funktion.



konvex



konkav

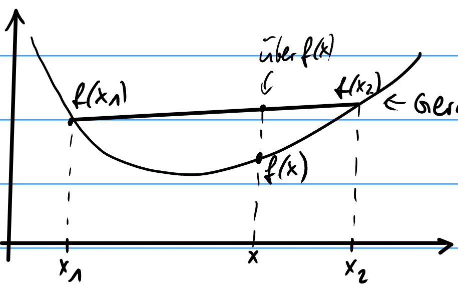
Diese Eigenschaft bezieht sich auf ein Intervall im Definitionsbereich, die Funktion muss nicht stetig sein. Es wird eine geometrische Eigenschaft beschrieben, anschaulich die "Krümmung".

13.5. Sei $\mathcal{I} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ echtes IV, $f: D \to \mathbb{R}$.

<u>Def.</u>:

- $f$ heißt <u>konvex auf $\mathcal{I}$</u> $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in $\mathcal{I}$, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- $f$ heißt <u>konkav auf $\mathcal{I}$</u> $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in $\mathcal{I}$, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- $f$ heißt <u>streng</u> <u>konvex auf $\mathcal{I}$</u> $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in $\mathcal{I}$, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- $f$ heißt <u>streng</u> <u>konkav auf $\mathcal{I}$</u> $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in $\mathcal{I}$, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- $(a, f(a))$ heißt <u>Wendepunkt</u>, falls $\exists x_1, x_2: a \in [x_1, x_2] \subseteq \mathcal{I}$ und $f$ streng $\begin{Bmatrix} \text{konvex} \\ \text{konkav} \end{Bmatrix}$ auf $[x_1, a]$ und $f$ streng $\begin{Bmatrix} \text{konkav} \\ \text{konvex} \end{Bmatrix}$ auf $[a, x_2]$.

Skizze:




← Geradengleichung: $G(\lambda) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + \lambda \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ f(x_1) - f(x_2) \end{pmatrix}}^{\text{Richtungsvektor}} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ (in Parameterform; $\lambda$: Parameter)

$\rightsquigarrow G(0) = \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}$, $G(1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$

Sei $x \in [x_1, x_2]$.

Dann: $\exists \lambda \in [0,1]$ mit $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = x \in [x_1, x_2]$.

($\lambda$ parametrisiert "Zwischenstelle" $x$ zwischen $x_1$ und $x_2$)

$\rightarrow x$ liegt zwischen $x_1 = 1 \cdot x_1 + (1-1)x_2$ und $x_2 = 0 \cdot x_1 + (1-0) \cdot x_2$ genau für $\lambda \in [0,1]$

Für die "Linkskurve", d.h. Konvexität, liegen all die Funktionswerte unterhalb der jeweiligen y-Komponente der Verbindungsgeraden $G$ für das jeweilige $\lambda$. Dies wird mit der Ungleichung in der Definition ausgedrückt.

**13.6.** Haben: $f$ (streng) konvex $\Leftrightarrow$ $-f$ (streng) konkav.

**13.7.** **Satz:** **Vor.:** $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar. **Beh.:** $f$ konvex $\Leftrightarrow$ $f'$ isoton.

**Bew.:** Sei $x_1 < x_2 \in I$, $\lambda \in [0,1]$.

Es ist $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $1-\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$,

d.h. mit $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) = f(x)$

ist: $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ $\quad (*)$

$\Leftrightarrow \lambda(f(x) - f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x))$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Zu „$\Rightarrow$": $$\lim_{x \to x_1+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \leq \lim_{x \to x_1+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

und $$\lim_{x \to x_2-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(x_2) \geq \lim_{x \to x_2-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

also: $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, d.h. $f'$ ist isoton.

Zu „$\Leftarrow$": MWS 12.13 $\rightsquigarrow$ $\exists \xi_1 \in ]x_1, x[$ $\exists \xi_2 \in ]x, x_2[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \overset{\text{Vor. } f' \text{ isoton}}{\leq} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

dies ist $\Leftrightarrow (*)$. $\square$

**13.8.** **Korollar:** **Vor.:** $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diff'bar. **Beh.:** $f$ konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

**Bew.:** Klar mit 13.7 und 12.15 (a). $\square$

Verallg. der "Konvexität" definierenden Ungl. auf $n$ Stellen

**13.9** **Jensensche Ungleichung:** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, $n \geq 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Dann gilt: $\forall x_1, \dots, x_n \in [a,b]$: $f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$

**Bew.** (Vollst. Ind.): $n=2$: $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 \rightsquigarrow f(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda_1} x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{(1-\lambda_1)}_{\lambda_2} f(x_2)$ laut Vor. ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: $f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right)$

$$= f\Big((1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} x_j}_{=x_1'} + \lambda_{n+1} \underbrace{x_{n+1}}_{=x_2'}\Big) \overset{\text{Vor.}}{\leq} (1-\lambda_{n+1}) f\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} x_j\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\overset{\text{Ind. Vor.}}{\leq} (1-\lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} f(x_j) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(x_j),$$

denn $\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ $\square$