Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An14: Spezielle Winkelfunktionen, exp/cos/sin Teil II

Stichworte: Kreiszahl π, Winkelberechnung, tan, arctan, cotan, arccot, hyperbolische Funktionen, Polarkoordinatendarstellung [Hoff, §4.8, 4.12]

14.1. **Einleitung:** Wir def. $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste positive Nullstelle der reellen Cosinusfunktion. Winkel werden im Bogenmaß gemessen, und π entspricht dem Halbkreiswinkel. Wir behandeln noch weitere, spezielle Winkelfunktionen und hyperbolische Funktionen.

14.2. **Lemma:** $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}: \quad \{z \in \mathbb{C};\ \exp(z) = 1\} = \{n\alpha i;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Bew.: Sei zur Abkürzung $K := \{z \in \mathbb{C};\ \exp(z) = 1\}$ (=l.S.).

- Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $|\exp(z)| = \exp(x)$,
denn $|\exp(z)| = |\exp(x+iy)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| \overset{8.10}{=} |\exp(x)| \cdot 1 = \underbrace{\exp(x)}_{>0 \text{ laut } 8.4.(5)}$.

Somit gilt für $z = x+iy \in K$, dass $\exp(x) = |\exp(z)| = |1| = 1$, d.h. $\operatorname{Re}(z) = x = 0$.
Also ist $K \subseteq \mathbb{R}i$.

- Nun gilt $\exp(i) = \cos(1) + i\sin(1)$ mit $\cos(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{2j}}{(4j)!} + \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{2j+1}}{(4j+2)!}$
$= \sum_{j\geq 0} \left(\frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j+2)!} \right) > 0$, weil

$$\frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j+2)!} > 0 \iff (4j+2)! > (4j)!$$
$$\iff (4j+2)(4j+1) > 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \ \checkmark$$

Es folgt $\operatorname{Re}(\exp(i)) = \cos(1) > 0$.

- Nun gilt $\exp(2i) = \cos(2) + i\sin(2)$ mit $\cos(2) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$
$= -\frac{1}{3} + \sum_{j\geq 1} \left(\frac{2^{4j+4}}{(4j+4)!} - \frac{2^{4j+2}}{(4j+2)!} \right) < 0$,

weil $\frac{2^{4j+4}}{(4j+4)!} - \frac{2^{4j+2}}{(4j+2)!} < 0 \iff \frac{2^{4j+4}}{2^{4j+2}} < \frac{(4j+4)!}{(4j+2)!}$
$\iff 4 = 2^2 < (4j+3)(4j+4) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$. $\checkmark$

Es folgt $\operatorname{Re}(\exp(2i)) = \cos(2) < 0$.

- Da $f(x) = \operatorname{Re}(\exp(xi))$ stetig ist, ex. laut ZWS 9.29 ein $b \in]1,2[$ mit $\operatorname{Re}(\exp(bi)) = \cos(b) = 0$. Es folgt $4bi \in K$,
da $\exp(4bi) \underset{\text{de Moivre, 8.4(7)}}{=} \exp^4(bi) = (\underbrace{\cos(b)}_{=0} + i\sin(b))^4 = i^4 \sin^4(b) = \overbrace{\sin^4(b)}^{\geq 0}$
$\Rightarrow |\sin^4(b)| = |\exp(4bi)| \overset{8.10}{=} 1$.

An 14

- Weiter weiß man, dass $K \neq \mathbb{R}i$,

  da etwa $\exp(2\cdot i) = \cos(2) + i\sin(2) \neq 1$ wegen $\cos(2) < 0 \Rightarrow 2i \notin K$.

- Hat man ein $yi \in K$ mit $y \in \mathbb{R}$, so folgt $\forall n \in \mathbb{Z}: nyi \in K$, (*)

  denn $\exp(nyi) \overset{\text{def.}}{=} \exp^n(yi) = 1^n = 1$. ⌜$y = 4b$ tut's, ebenso $y = -4b$⌟

- Setze $M := iK \cap \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $-4bi \in K$ und $(-4bi)i = 4b > 0 \Leftrightarrow 4b \in M$

  ist $M \neq \emptyset$. Daher $\exists\, \alpha := \inf M$, haben $\alpha \neq 0$ da $K \neq \mathbb{R}i$.

  ⌜Sonst $]0,\varepsilon[\subseteq \Im K$. Sei $y \in \mathbb{R}$, dann $\exists\, n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\cdot y < \varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{n}\cdot yi \in K \Rightarrow n\cdot(\frac{1}{n}yi) \in K \Rightarrow y \in \Im K$, ↯ zu $K \neq \mathbb{R}i$.⌟

- Es folgt $\{n\alpha i;\, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq K$ ✓ nach (*), aber auch „$\supseteq$" gilt:

  ⌜Wäre sonst $z = (n\alpha + r)i \in K$ mit $0 < r < \alpha$, so ist

  $1 = \exp(z) = \underbrace{\exp(n\alpha i)}_{=1}\cdot\exp(ri) = \exp(ri)$, d.h. $ri \in K$ und $-ri \in K$,

  also $r \in M$ mit $r < \alpha$, ↯ zu $\alpha = \inf M$.⌟ □

14.3. **Kreiszahl π:** Haben $\exp^{-1}(\{1\}) = \alpha i\cdot\mathbb{Z}$, $\alpha = 4b$, wo $\cos(b) = 0$, $b > 0$ minimal.

Diese kleinste positive Nullstelle von cos bekommt von uns folgenden Namen:

Def.: $\frac{\pi}{2} := \min\{b \in \mathbb{R}_{>0};\ \cos(b) = 0\}$ und π heißt Kreiszahl.

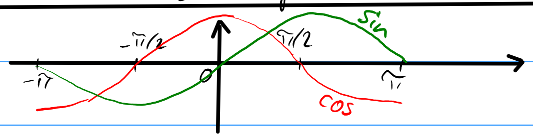
Haben $1 < \frac{\pi}{2} < 2$ laut Beweis, sowie $\exp^{-1}(\{1\}) = 2\pi i\,\mathbb{Z}$. ⌜$\alpha = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$⌟

Bem.:
- $e^0 = 1 \Rightarrow \cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \exp(4\cdot\frac{\pi}{2}i) = \exp(2\pi i) = 1 = \sin(2\pi) + \cos(2\pi)$

  $\overset{\text{de Moivre}}{=} \exp^4(\frac{\pi}{2}i) = (i\sin\frac{\pi}{2})^4$

  $\Rightarrow (\sin\frac{\pi}{2})^2 = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. ⌜Benutzen die Formel von de Moivre in 8.4 (7).⌟

14.4. Diskussion des Graphen von cos und sin:



a) Es ist $\sin\frac{\pi}{2} = +1$, ⌜$\frac{\pi}{2} < 2 < \sqrt{6}$⌟

denn für $\sin_{\restriction]0,\sqrt{6}[}$ ist

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \underbrace{x}_{>0}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)}_{>0} + \frac{x^5}{5!}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right)}_{>0} + \ldots > 0$

b) Es ist $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} - \sin(z)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} = -\sin(z)$.

c) Es ist $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} + \sin(z)\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} = \cos(z)$.

d) $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$ ⌜zweimal b) & c) anwenden⌟

e) $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ ⌜zweimal d) anwenden⌟

f) $\cos_{\restriction [0,\sqrt{6}]}$ ist streng antiton.

Bew.: • Zunächst gilt $\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$.

$\ulcorner$ wegen: $\cos(u \mp v) = \cos u \cos v \pm \sin u \sin v$

$\Rightarrow \cos(u+v) - \cos(u-v) = -2 \sin u \sin v$,

setze $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$. $\lrcorner$

• Sei $0 \leq y < x \leq \sqrt{6}$. Dann ist

$$\cos x - \cos y = -2 \underbrace{\sin\frac{x+y}{2}}_{>0} \underbrace{\sin\frac{x-y}{2}}_{>0} \underset{\text{nach a)}}{<} 0 \Rightarrow \cos x < \cos y.$$

$\square$

g) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = i$

h) $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ $\ulcorner$"Eulersche Formel"$\lrcorner$

i) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} \underset{h)}{=} e^z$.

j) jetzt 12.4: $\arcsin = \sin^{-1}$,
analog $\arccos = \cos^{-1}$

14.5. Charakterisierende Eigenschaft der Funktionen sin und cos:

Vor.: $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, I echtes IV, $I \underset{c}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$ diff'bar, $s' = c$, $c' = -s$.

Anfangsbedingung: $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Beh.: $s = \sin$, $c = \cos$.

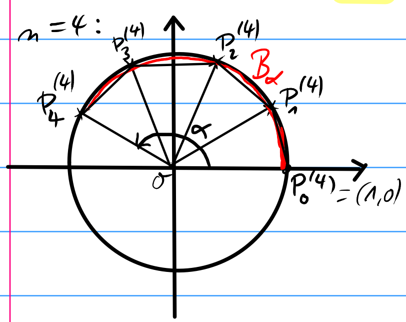
Bew.: Sei $g := s - \sin$, $h := c - \cos$.

Dann ist $g' = h$, $h' = -g$, $g(0) = 0 = h(0)$. Sei $\varphi := g^2 + h^2$.

Dann ist $\varphi(0) = 0$, $\varphi' = 2gg' + 2hh' = 2(gh - hg) = 0$.

Also ist $\varphi = 0$, d.h. $g^2 = -h^2 \Rightarrow g^2 = h^2 = 0 \Rightarrow g = h = 0 \Rightarrow s = \sin, c = \cos$. $\square$

14.6. Länge des Bogens $B_\alpha := \{(\cos t, \sin t);\ 0 \leq t \leq \alpha\}$: Sei $2\pi \geq \alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$,
$k = 0, 1, \ldots, n$.



Es sei $P_k^{(n)} := \left(\cos(k\frac{\alpha}{n}), \sin(k\frac{\alpha}{n})\right) \in \mathbb{R}^2$

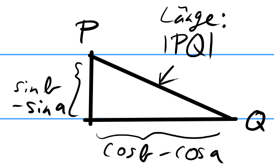
und $\mathcal{P}^{(n)}$ der Streckenzug der $P_k^{(n)}$,

d.h. $\mathcal{P}^{(n)}: P_0^{(n)} \rightsquigarrow P_1^{(n)} \rightsquigarrow P_2^{(n)} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow P_n^{(n)}$.

Seine Länge sei $\ell(\mathcal{P}^{(n)})$.

Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(\mathcal{P}^{(n)}) = \alpha$.

Bew.: Sei $P=(\cos a, \sin a)$, $Q=(\cos b, \sin b)$.



Dann ist $|PQ|^2 = (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2$

$$= \left(2\sin\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}\right)^2 + \left(2\cos\tfrac{a+b}{2}\sin\tfrac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= 4\sin^2\tfrac{a-b}{2}\cdot\underbrace{\left(\cos^2\tfrac{a+b}{2} + \sin^2\tfrac{a+b}{2}\right)}_{=1} = 4\sin^2\tfrac{a-b}{2}.$$

$\Rightarrow |PQ| = 2\left|\sin\frac{a-b}{2}\right|$.

Damit gilt: $\ell(\mathcal{P}^{(n)}) := \sum\limits_{k=1}^{n} |P_{k-1}^{(n)} P_k^{(n)}| = 2\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{\alpha}{2n}\right|$

$$= 2n\left|\sin\tfrac{\alpha}{2n}\right| = \alpha\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}\right| = \alpha\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2n} - \sin 0}{\frac{\alpha}{2n} - 0}\right| \xrightarrow[\text{d.h. } \frac{\alpha}{2n}\to 0]{n\to\infty} \alpha\,|\underbrace{\sin'(0)}_{=\cos(0)=1}| = \alpha.$$

14.7. **Bem.:** Dies bestätigt, dass die Länge des Bogens B_α auf dem Einheitskreis α beträgt. Die Winkelmessung im Bogenmaß als Bogenlänge zu erklären, ist daher mathematisch sinnvoll. Die Bogenlänge eines Viertels des Einheitskreises z.B. beträgt somit $\frac{\pi}{2}$: so wird der Winkel im Bogenmaß gemessen.

Tangens und Cotangens samt Umkehrfunktionen

14.8. **Def.:** Tangens: $\tan := \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R}\setminus\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

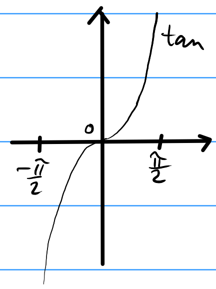
(1) a) $\tan$ diff'bar, $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ wegen $\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$.

b) $\tan$ ist π-periodisch,

denn $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{14.4.\,d)}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.

$\tan(-x) = -\tan(x)$, denn $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

c) $\tan_{|\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ streng isoton: $\frac{1}{\cos^2} > 0$ ✓



d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan = -\infty$.

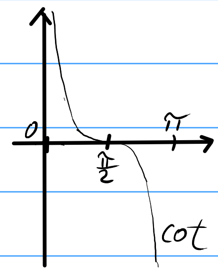
e) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ wegen $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\underset{14.4.c)}{=} \cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

f) arctan $:= \left(\tan_{\restriction]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ist streng isoton, bijektiv, diff'bar und heißt Arcustangens.

g) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wegen $x = \arctan y \Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} \overset{a)}{=} \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$.

14.9. Def.: Cotangens: $\cot := \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$.



a) cot ist diff'bar, $\cot' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2(x))$.

b) cot ist π-periodisch, $\cot(-x) = -\cot(x)$.

c) $\cot_{\restriction]0,\pi[}$ ist streng antiton.

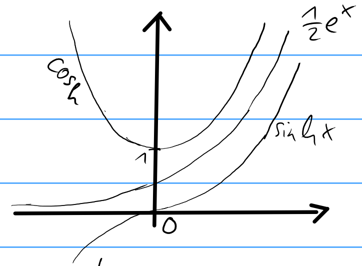
d) $\lim\limits_{x\to 0+} \cot x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi-} \cot x = -\infty$.

e) $\cot\frac{\pi}{4} = 1$.

f) arccot $:= \left(\cot_{\restriction]0,\pi[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ streng antiton, bijektiv, diff'bar, und heißt Arcuscotangens.

g) $\text{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Hyperbolische Funktionen



14.10. Sei $x \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{Sin} = \mathrm{Sin} = \sinh$: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\mathfrak{Cof} = \mathrm{Cos} = \cosh$: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Dann heißt sinh der Sinus hyperbolicus und cosh der Cosinus hyperbolicus.

14.11. Eigenschaften:

a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\sinh(0) = 0$.

$\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\cosh(0) = 1$.

b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ wegen l.S. $= (\cosh(x) + \sinh(x)) \cdot (\cosh(x) - \sinh(x))$
$= e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$.

c) $\sinh(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $\cosh(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$.

d) sinh diff'bar, $\sinh' = \cosh$, cosh diff'bar, $\cosh' = \sinh$

14.12. Umkehrfunktionen von sinh, cosh:

$\operatorname{arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, streng isoton, bijektiv, diff'bar,
heißt Areasinus hyperbolicus.

Haben: $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

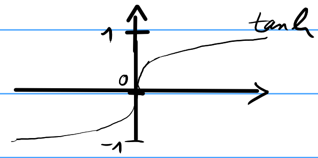
Bew.: $y = \operatorname{arsinh}(x)$

$$\Rightarrow \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(y)} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad \square$$

$\operatorname{arcosh} := (\cosh)^{-1} : [1,\infty[\to [0,\infty[$ streng isoton, bijektiv, diff'bar,
heißt Area cosinus hyperbolicus.

Haben: $\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

14.13. Tangenshyperbolicus: $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$



a) $\tanh(-x) = -\tanh(x)$, $\tanh(0) = 0$.

b) tanh diff'bar, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.

b') tanh streng isoton

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ wegen

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$$
$$\xrightarrow{x\to-\infty} -1, \text{ da tanh ungerade.}$$

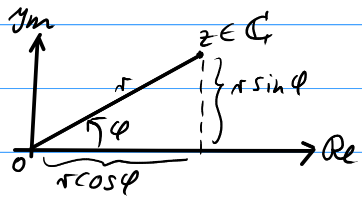
d) Umkehrfunktion: $\operatorname{artanh} := (\tanh)^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$
ist streng isoton, diff'bar, ungerade, heißt Areatangens hyperbolicus.

Haben $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

14.14. Polarkoordinatendarstellung: Beschreiben jeden Punkt $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $x,y \in \mathbb{R}$,
im Polarkoordinatensystem eindeutig durch $(\varphi, r) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}_{>0}$

mit $z = r\exp(i\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

dabei gelten $r = |z|$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.



Der Winkel φ heißt Argument von z.

Der Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ von $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1)$, $z_2 = r_2\exp(i\varphi_2)$
entspricht $z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp(i\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\text{Addition der Argumente/Winkel}})$