Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 15: Das Riemann-Integral

[Hoff, §5.2.1/2]

Stichworte: Unterteilung, Treppenfunktion, (Riemann-) Integrierbarkeit, Kriterien, Eigenschaften integrierbarer Fktn. und des (bestimmten) Integrals

---

15.1. Einleitung: Ausgehend von der Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken als Produkt der Seitenlängen soll eine Methode zur Berechnung des Flächeninhalts allgemeinerer (insbesonderer krummlinig begrenzter) Flächen wie z.B. der Kreis gewonnen werden. Als Methode dient die Ausschöpfung von innen und außen durch endlich viele (nichtüberlappende) Rechtecke.

Wir behandeln hier reelle Funktionen auf einem festen beschränkten abgeschlossenen echten Intervall $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, betrachte also $\mathcal{F} := \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$.
Im folgenden sei also $[a,b]$ (vor-)gegeben. Schreibe stets $f \leq g$ für $\forall x \in [a,b]: f(x) \leq g(x)$.

15.2. Def.: • Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Tupel $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt **Unterteilung / Zerlegung** (von $[a,b]$),
falls $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ gilt.

- Die x_j heißen **Teilungspunkte / Stützpunkte**, die n Intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ die **Teilintervalle** der Unterteilung.
- Eine Unterteilung heißt **äquidistant**, wenn alle ihre n Teilintervalle gleichlang sind, d.h. falls $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ für $j \in \{0, \dots, n\}$ gilt.
- Eine Unterteilung $\underline{x}$ heißt (echt) **feiner** als eine Unterteilung $\tilde{\underline{x}}$, wenn die Teilungspunkte von $\underline{x}$ eine (echte) **Obermenge** der Teilungspunkte von $\tilde{\underline{x}}$ bilden.
- $h \in \mathcal{F}$ heißt **Treppenfunktion**, falls es eine Unterteilung $\underline{x} = (x_0, \dots, x_n)$ gibt mit $\forall j \in \{1, \dots, n\}$: $h_{\restriction]x_{j-1}, x_j[}$ konstant, etwa $= h_j \in \mathbb{R}$.

Sei $\mathcal{E} := \{h \in \mathcal{F};\ h \text{ Treppenfkt.}\}$ die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

15.3. **Bsp.:** Die Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lfloor x \rfloor$
(Gaußklammerfunktion, eingeschränkt auf $[a,b]$) ist eine Treppenfunktion.
Die zugehörige Unterteilung ist nicht eindeutig und kann beliebig verfeinert werden.

15.4. **Satz:** $\mathcal{E}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{F}$.

Bew.: Haben $0 \in \mathcal{E}$, und $h \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha h \in \mathcal{E}$.
Seien $h, g \in \mathcal{E}$. Wähle Verfeinerung (durch Hinzufügen endlich vieler neuer Teilpunkte) so, dass OE h und g die gleiche Unterteilung haben. Mit dieser ist $h+g \in \mathcal{E}$. □

15.5. **Def.:** Der Inhalt / das Integral einer Treppenfkt. $h \in \mathcal{E}$ ist
$\int h := \int h(x)\,dx := \sum_{j=1}^{m} h_j(x_j - x_{j-1})$, und ist unabhängig von der gewählten Unterteilung $\underline{x}$, da dieser Wert invariant unter Verfeinerung ist.

15.6. **Satz:** $\int : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ist linear, d.h. $h, k \in \mathcal{E}$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \int(\alpha h + k) = \alpha \int h + \int k$.

Bew.: $\int \alpha h = \alpha \int h$ klar, für $h, k \in \mathcal{E}$ wähle OE die gleiche Unterteilung $\underline{x}$,
damit ist $\int(h+k) = \sum_{j=1}^{m} (h_j + k_j)\cdot(x_j - x_{j-1})$
$= \sum_{j=1}^{m} h_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{m} k_j(x_j - x_{j-1}) = \int h + \int k$. □

15.7. **Bem.:** $h, k \in \mathcal{E}$, $h \leq k \Rightarrow \int h \leq \int k$.
Anschaulich ist der Inhalt einer Treppenfunktion $h \geq 0$ der Flächeninhalt, den die Treppenfunktion mit der x-Achse (zwischen a und b) einschließt, und berechnet sich aus der Summe der Rechtecksflächen der Rechtecke mit Seitenlängen h_j und $x_j - x_{j-1} > 0$. Für $h \in \mathcal{E}$ mit $h \not\geq 0$ ist gewollt, dass die "Fläche" $h_j(x_j - x_{j-1})$ auch negativ sein kann. Für beschränkte Funktionen auf $[a,b]$ unternehmen wir eine Annäherung des entsprechenden Inhalts mit dem Inhalt von Treppenfunktionen.

15.8. **Def.:** Sei $\mathcal{B} := \mathcal{B}([a,b]) := \{f \in \mathcal{F};\ \exists M > 0 : |f| \leq M\}$ die Menge der auf $[a,b]$ beschränkten Funktionen.

15.9. **Def.:** Sei $\mathcal{I} := \mathcal{I}([a,b]) := \{f \in \mathcal{B};\ \forall \varepsilon > 0\ \exists u, v \in \mathcal{E}$, u, v mit gemeinsamer Unterteilung:
$u \leq f \leq v$ und $\int v - \int u = \int (v-u)(x)\,dx < \varepsilon\}$ die Menge der auf $[a,b]$ (Riemann-) integrierbaren Funktionen.

Bem.: Sind u, v irgendwelche Treppenfunktionen mit $u \leq f \leq v$, kann zu einer gemeinsamen Unterteilung mit derselben Eigenschaft $u \leq f \leq v$ übergegangen werden.

15.10. **Satz:** $\mathcal{R}, \mathcal{J}$ sind UVRe von $\mathcal{F}$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$.

Bew.: Inklusionen klar, UVRe: $f \in \mathcal{J}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{J}$ klar, ebenso für $\mathcal{R}$,
weiter: $f, g \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists\, u, v, \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{E}: u \le f \le v,\ \hat{u} \le g \le \hat{v},\ \int(v-u) < \frac{\varepsilon}{2},\ \int(\hat{v}-\hat{u}) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow u+\hat{u} \le f+g \le v+\hat{v}$ mit $u+\hat{u}, v+\hat{v} \in \mathcal{E}$ (OE gemeinsame Unterteilungen)
und $\int(v+\hat{v}-(u+\hat{u})) \underset{15.6.}{=} \int(v-u) + \int(\hat{v}-\hat{u}) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also: $f+g \in \mathcal{J}$. □

15.11. **Bem./Def.:** Sind $u, v \in \mathcal{E}$ mit $u \le f \le v$, so heißt $\int u$ eine untere Summe und $\int v$ eine obere Summe von f auf $[a,b]$. Wegen 15.7. ist $\int u \le \int v$.
Eine spezielle untere und obere Summe ist $U_{\underline{x}} := \int u_{\underline{x}}$, $V_{\underline{x}} := \int v_{\underline{x}}$ für die Treppenfktn.
$u_{\underline{x}}(t) := \sup f([x_{j-1}, x_j[)$, $v_{\underline{x}}(t) := \inf f([x_{j-1}, x_j[)$, wenn $t \in [x_{j-1}, x_j[$.

15.12. **Satz:** Ist $f \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}$, so existieren $U := U_f := \sup\{\int u;\ u \in \mathcal{E},\ u \le f\}$ und $V := V_f := \inf\{\int v;\ v \in \mathcal{E},\ f \le v\}$, und es gilt $U = V$.

Bew.: Ex. von U klar, da $\emptyset \ne \{\int u;\ u \in \mathcal{E},\ u \le f\}$ n.o. beschränkt durch $\int m$, ← Konstante Fkt.
$m := \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$, analog Ex. von V. Weiter $U \le V$ klar wegen $\int u \le \int v$ für $u \le v$.
Ann.: $V > U$, dann nimm $\varepsilon := \frac{V-U}{2} > 0$, da $f \in \mathcal{J}$ ex. dazu $u, v \in \mathcal{E}$ mit $u \le f \le v$, $V-U \le \int v - \int u < \varepsilon = \frac{V-U}{2}$, ↯. Also ist $U=V$. □

15.13. **Kor./Def.:** Ist $f \in \mathcal{J}$, so ex. $A \in \mathbb{R}$ mit $A = U = V$.
Notation: $\int_a^b f(x)\,dx := A$, wir nennen $\int_a^b f(x)\,dx$ das (bestimmte) Integral von f über $[a,b]$, bzw. das (Riemann-) Integral, auch: eigentliches Riemann-Integral.

(Sinnvoller wäre die Notation $\int_a^b f$, da die "Variable" x keine Rolle spielt.)
Die Fkt. f nennen wir Integrand(funktion), a und b heißen untere und obere (Integrations-) Grenze, und $[a,b]$ heißt Integrationsintervall.

15.14. **Bsp.:** Für $h \in \mathcal{E}$ ist $\int_a^b h(x)\,dx = \int h$, z.B. $\int_2^{10} \lfloor x \rfloor\,dx = \sum_{j=1}^{8} \overbrace{(j+1)}^{\text{Wert von } \lfloor x \rfloor \text{ auf }]x_{j-1}, x_j[} \cdot \underbrace{(j-(j-1))}_{=1}$
↑ Unterteilung $(2,3,\ldots,10) = (x_0, x_1, \ldots, x_8)$
$= \sum_{j=2}^{9} j \underset{\text{kl. Gauß}}{=} \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot 10 - 1 = \underline{\underline{44}}$.

Erste, grundlegende Eigenschaft des Integrals:

15.15. <u>Linearität</u>: $f, g \in \mathcal{J}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\int(f+g) = \int f + \int g$
$\int \alpha f = \alpha \int f$

$$\Rightarrow \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

<u>Bew.:</u> <u>15.6.</u> mit $\inf(M+N) \overset{①}{=} \inf M + \inf N \leq \sup M + \sup N \overset{②}{=} \sup(M+N)$

für $M, N \subseteq \mathbb{R}$, wenn $M+N := \{m+n;\ m \in M, n \in N\} \subseteq \mathbb{R}$. ✓

<u>Ausführlicher</u>: • $f \in \mathcal{J} \Rightarrow \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$ klar, • Seien $f, g \in \mathcal{J}$, wissen schon $f+g \in \mathcal{J}$

wegen <u>15.10</u>, noch <u>z.z.</u>: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Haben $\int_a^b f + \int_a^b g = \sup\{\int u;\ u \in \mathcal{E}, u \leq f\} + \sup\{\int \tilde{u};\ \tilde{u} \in \mathcal{E}, \tilde{u} \leq g\}$

$\underset{②}{=} \sup\{\int u + \int \tilde{u};\ u, \tilde{u} \in \mathcal{E}, u \leq f, \tilde{u} \leq g\}$

$= \sup\{\int(u + \tilde{u});\ u, \tilde{u} \in \mathcal{E}, u \leq f, \tilde{u} \leq g\}$ ← OE gleiche Unterteilung für u und $\tilde{u}$

$\geq \sup\{\int w;\ w \in \mathcal{E}, w \leq f+g\} = \int_a^b (f+g)$, da $f+g \in \mathcal{J}$, $\rightsquigarrow w = u + \tilde{u}$

analog $\int_a^b f + \int_a^b g = \inf\{\int v;\ v \in \mathcal{E}, v \geq f\} + \inf\{\int \tilde{v};\ \tilde{v} \in \mathcal{E}, \tilde{v} \geq g\}$

$\underset{①}{=} \inf\{\int v + \int \tilde{v};\ v, \tilde{v} \in \mathcal{E}, v \geq f, \tilde{v} \geq g\}$

$= \inf\{\int(v + \tilde{v});\ v, \tilde{v} \in \mathcal{E}, v \geq f, \tilde{v} \geq g\}$ ← OE gleiche Unterteilung für v und $\tilde{v}$

$\leq \inf\{\int \tilde{w};\ \tilde{w} \in \mathcal{E}, \tilde{w} \geq f+g\} = \int_a^b (f+g)$, da $f+g \in \mathcal{J}$, $\rightsquigarrow \tilde{w} = v + \tilde{v}$

es folgt die Gleichheit $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. □

15.16. <u>Def.</u>: Für $A \subseteq \mathbb{R}$ def. die <u>charakteristische Funktion</u> $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

15.17. <u>Beh.</u>: Für $f \in \mathcal{J}([a,b])$ und ein IV $A \subseteq \mathbb{R}$ (nicht notwendig beschränkt)

gilt $\chi_A \cdot f \in \mathcal{J}([a,b])$.

<u>Bew.</u>: Für $h \in \mathcal{E}$ ist $\chi_A \cdot h \in \mathcal{E}$, ist $u, v \in \mathcal{E}$ geg. mit $u \leq f \leq v$ (auf $[a,b]$),

$\int v - \int u < \varepsilon$, so folgt $\chi_A \cdot u \leq \chi_A \cdot f \leq \chi_A \cdot v$ mit

$\int \chi_A \cdot v - \int \chi_A \cdot u \leq \int v - \int u < \varepsilon$. □

15.18. <u>Def.</u>: Für $A \subseteq [a,b]$ schreiben wir $\int_A f(x)dx := \int_a^b (\chi_A \cdot f)(x)dx$,

ist etwa $A \in \{]c,d[, [c,d],]c,d], [c,d[\}$, schreibe $\int_c^d f(x)dx := \int_A f(x)dx$.

<u>Speziell</u>: $\int_c^c f(x)dx = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$

15.19. Additivität bzgl. der IVgrenzen:

$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ a<b<c: f \in \mathcal{I}([a,c]) \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}([a,b]) \cap \mathcal{I}([b,c])$,

dann gilt: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$. ⊛

Bew.: $f \cdot \chi_{[a,c]} = f \cdot \chi_{[a,b]} + f \cdot \chi_{[b,c]}$ mit Linearität 15.15. □

15.20. Def.: $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$ für $a<b$.

Bem.: Damit gilt 15.19 ⊛ für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$. [z.B. $\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0 = \int_a^a f$ ✓]

[$f \in \mathcal{I}([\min(a,b,c), \max(a,b,c)])$]

$f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$

15.21. Integralabschätzung/Monotonie: $f,g \in \mathcal{I}([a,b]),\ f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Bew.: Sei $h := g - f \ge 0$, also $\int u \le \int_a^b h(x)\,dx \le \int v$ für $u,v \in \mathcal{E}$ mit $u \le h \le v$, wobei $u = 0$ zulässig ist mit $\int u = \int 0 = 0$, es folgt $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \overset{15.15.}{=} \int_a^b h(x)\,dx \ge 0$. □

15.22. Speziell: • Da $\pm f \le |f|$, folgt $\pm \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \pm f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, insb. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

• Gilt $m \le f(x) \le M$ für $m, M \in \mathbb{R}$ und alle $x \in [a,b]$, folgt $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Bsp.: $-\int_a^b x\,dx \le \int_a^b x \sin(x)\,dx \le \int_a^b x\,dx$.

Für die explizite Berechnung konkreter bestimmter Integrale von Funktionen, die keine Treppenfunktionen sind, benötigen wir, dass das $\int$ als Limes von Rechtecksummen bzw. Riemannsummen berechnet werden kann.

15.23. Def.: • Ist $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine Unterteilung von $[a,b]$, so heißt $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\forall j \in \{1,\dots,n\}: x_{j-1} \le z_j \le x_j$ eine Belegung / Zwischenpunktauswahl von $\underline{x}$.

• Wir nennen $\Delta(\underline{z}) := \max\{|x_j - x_{j-1}|;\ j \in \{1,\dots,n\}\}$ die Feinheit von $\underline{x}$.

• Ist $f: [a,b] \in \mathbb{R}$, so heißt

$$S(f, \underline{x}, \underline{z}) := \sum_{j=1}^n f(z_j)\cdot(x_j - x_{j-1})$$ eine Zwischensumme / Riemannsumme

auch: Rechtecksumme

von f zur Unterteilung $\underline{x}$ und Belegung $\underline{z}$.

15.24. **Satz**: Die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann-) integrierbar, wenn für alle Folgen von Unterteilungen $\underline{x}_m$ mit $\lim\limits_{m\to\infty}\Delta(\underline{x}_m)=0$ und alle zu $\underline{x}_m$ gehörigen Belegungen $\underline{z}_m$ die Folge $S(f,\underline{x}_m,\underline{z}_m)$ gegen ein und denselben GW strebt. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} S(f,\underline{x}_m,\underline{z}_m).$$

Bew. (nur Beweis-Skizze, für ausführlichen Beweis s. [Heuser, Satz 82.3, 83.1])

„⇒": Sei f int'bar, sei $m\in\mathbb{N}$, seien dazu $\underline{x}_m,\underline{z}_m$ gegeben mit $\lim\limits_{m\to\infty}\Delta(\underline{x}_m)=0$.
Dazu ex. laut Vor. $u_m, v_m\in\mathcal{E}$ mit $u_m\le f\le v_m$ und $\int(v_m-u_m)<\frac{1}{m}$,
wobei $\underline{x}_m$ die gemeinsame Unterteilung von u_m, v_m sei (die $\underline{z}_m$ müsste man noch anpassen)...
Haben $\int u_m\le U$, $V\le\int v_m$ mit U,V aus 15.12, wo $U=V=\int_a^b f(x)dx$, da f int'bar.
Also ist $0\le U-\int u_m\le U-\int u_m+\int v_m-V \underset{U=V}{=} \int(v_m-u_m)<\frac{1}{m}\xrightarrow{m\to\infty}0$, ebenso $\int v_m-V\xrightarrow{m\to\infty}0$,
es folgt $\int u_m\to\int_a^b f(x)dx\leftarrow\int v_m$.
Wegen $\int u_m\le S(f,\underline{x}_m,\underline{z}_m)\le\int v_m$ folgt mit dem Sandwichlemma 5.26.(e)
dass $\lim\limits_{m\to\infty} S(f,\underline{x}_m,\underline{z}_m)=\int_a^b f(x)\,dx$.

„⇐": Sei die Bedingung erfüllt, z.z.: f int'bar. Sei $m\in\mathbb{N}$ und
$\underline{x}$ die äquidistante Unterteilung von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(\underline{x})=\frac{b-a}{m}$ $(\xrightarrow{m\to\infty}0)$
und setzen $u_m,v_m\in\mathcal{E}$ dazu als $u_m=u_{\underline{x}}$, $v_m=v_{\underline{x}}$ aus 15.11,
laut Konstruktion ist $u_m\le f\le v_m$ für alle $m\in\mathbb{N}$.
Sei nun $\varepsilon>0$. Da $S(u_m,\underline{x},\underline{z})\le S(v_m,\underline{x},\underline{z})$ für $n\to\infty$ gegen denselben GW streben, ex. n_0 so, dass $\forall m\ge n_0$: $\int v_m-\int u_m=S(v_m,\underline{x},\underline{z})-S(u_m,\underline{x},\underline{z})<\varepsilon$;
dabei bezeichnet $\underline{z}$ irgendeine Belegung der Unterteilung $\underline{x}$. Also ist f int'bar.

Bem.: Haben $\underbrace{S(u_m,\underline{x},\underline{z})}\le S(f,\underline{x},\underline{z})\le\underbrace{S(v_m,\underline{x},\underline{z})}$, diese Schranken heißen "Untersumme" und "Obersumme" bzgl. $\underline{x}$, vgl. 15.11. □

15.25. **Bsp**: $\int_a^b x^2\,dx=\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{j=1}^m x_j^2\cdot(x_j-x_{j-1}) \underset{\underline{x}=(a,a+\Delta,\dots,a+m\Delta=b)}{=} \lim\limits_{m\to\infty}\sum_{j=1}^m\left(a+j\cdot\frac{b-a}{m}\right)^2\cdot\frac{b-a}{m}$, mit Feinheit $\Delta=\frac{b-a}{m}$

speziell $a=0$: $\frac{b^3}{m^3}\sum_{j=1}^m j^2 \underset{\text{VI „Pyramidenformel"}}{=} \frac{b^3}{m^3}\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}=\frac{b^3}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m^2}+\frac{1}{6m^3}\right)\xrightarrow{m\to\infty}\frac{b^3}{3}$, also: $\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}$. □

Ein einfaches Kriterium für Integrierbarkeit ist:

15.26. **Satz**: Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: f ist auf $[a,b]$ int'bar.

Bem.: wird mit $\mathcal{C}([a,b])$ die Menge der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet, so besagt der Satz, dass $\mathcal{C}([a,b]) \subseteq \mathcal{J}([a,b])$ gilt.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$, gesucht: $\mu, \nu \in \mathcal{E}$ mit $\mu \leq f \leq \nu$, $\int(\nu - \mu) < \varepsilon$.

Hier wird "glm. Stetig" benutzt.

Da f auf $[a,b]$ stetig, ist f sogar gleichmäßig stetig laut Satz 10.8.
Zu $\eta := \frac{\varepsilon}{b-a}$ ex. deswegen ein $\delta > 0$ mit: $|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \eta$.
Wähle nun eine Zerlegung $\underline{x}$ von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(\underline{x}) = \delta$, also gelte $|x_j - x_{j-1}| < \delta$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Mit $\mu := \mu_{\underline{x}}$, $\nu := \nu_{\underline{x}}$, d.h.

$\mu(t) := \mu_j$ für $t \in [x_{j-1}, x_j]$, alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mu_j := \min\{f(t);\, t \in [x_{j-1}, x_j]\} = f(t_j)$,

$\nu(t) := \nu_j$ für $t \in [x_{j-1}, x_j]$, alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $\nu_j := \max\{f(t);\, t \in [x_{j-1}, x_j]\} = f(\tilde{t}_j)$

(t_j, $\tilde{t}_j$ ex. nach 9.30 (Satz vom Min./Max.), da f stetig auf $[x_{j-1}, x_j]$),

sind $\mu, \nu \in \mathcal{E}$ definiert mit $\mu \leq f \leq \nu$ und

$$\int(\nu - \mu) = \sum (\nu_j - \mu_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(f(t_j) - f(\tilde{t}_j)\right)}_{\leq \eta} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$\leq \eta \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (x_j - x_{j-1})}_{\text{Teleskopsumme}} = \eta\,(x_m - x_0) = \eta\,(b-a) = \varepsilon.$$

Also ist f int'bar. □

Weitere Eigenschaften des bestimmten Integrals:

15.27. **Satz**: Seien $f, g \in \mathcal{J}$, dann: i) $f \cdot g \in \mathcal{J}$, ii) $g \geq \alpha$ in $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{J}$,
iii) $f : [a,b] \to [c,d]$ int'bar, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int'bar.

Bew.: Zitieren [Heuser, Satz 84.8 / 84.9], dort nur Beweisandeutung. □

Bem.: in iii) kann "g stetig" nicht durch "g int'bar" ersetzt werden, s. [Heuser, Aufg. 7 §84].

15.28. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f \in \mathcal{J}([a,b])$, $g \geq 0$ (oder $g \leq 0$).

Beh.: a) $\exists\, \mu \in [\inf f, \sup f]$: $\int_a^b (fg)(t)\,dt = \mu \int_a^b g(t)$, b) f stetig $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$.

Bew.: b): ZWS für f ✓, a): da $\inf f \leq f \leq \sup f$ folgt $(\inf f) \cdot g \leq f g \leq (\sup f) \cdot g$,
also $(\inf f) \cdot \int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b (fg)(t)\,dt \leq (\sup f) \int_a^b g(t)\,dt$ mit 15.21 $\Rightarrow$ Beh. □