Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu

K. Halupczok

An 16: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

[Hoff § 52]

Stichworte: Stammfunktionen, partielle Integration, Substitutionsregel, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), Integralfunktionen, Integraltafel, Hauptsatzkantate

---

16.1. Einleitung: Wir betrachten Stammfunktionen und leiten Rechenregeln dafür her. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) liefert die Verbindung zwischen Stammfunktionen (den unbestimmten Integralen) und den Riemann-Integralen (den bestimmten Integralen), und damit erhalten wir einfachere Möglichkeiten zur konkreten Berechnung bestimmter Integrale (als im vorigen Kapitel).

16.2. Sei im folgenden $J \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes IV, alle Funktionen seien auf J definiert und reellwertig.

Def.: F heißt eine Stammfunktion (SF) von f, falls $F' = f$ ist.

Notation: $\int^x f(t)\,dt = F(x)$. Wir nennen dies ein "unbestimmtes Integral".

Dabei ist eine SF per Definition diff'bar.

16.3. Bem.: Sind F_1, F_2 zwei SFen von f, so ist $F_1' = f = F_2'$, also $(F_2 - F_1)' = 0$, d.h. $F_2 - F_1$ ist konstante Funktion, etwa $= c$. Dann ist $F_2 = F_1 + c$, und für $c \neq 0$ sind F_1 und F_2 verschieden.

Also: SFen sind bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beachten, dass $\int^x f(t)\,dt = F(x) \wedge \int^x f(t) = G(x)$ nicht $F(x) = G(x)$ impliziert.

16.4. Linearität: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und zwei stetige Funktionen $f, g : J \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int^x f(t)\,dt + \beta \int^x g(t)\,dt.$$

Bew.: $(\text{r.S.})' = \left(\alpha \int^x f(t)\,dt + \beta \int^x g(t)\,dt\right)' = \alpha \left(\int^x f(t)\,dt\right)' + \beta \left(\int^x g(t)\,dt\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$. □

Speziell: $\int^x (f(t) \pm g(t))\,dt = \int^x f(t)\,dt \pm \int^x g(t)\,dt$, $\quad \int^x (\alpha f)(t)\,dt = \alpha \int^x f(t)\,dt$

16.5 **Partielle Integration:** Für zwei stetig diff'bare Funktionen $u, v : J \to \mathbb{R}$ gilt

$\int u'v = uv - \int uv'$

$$\int^x u'(t)v(t)\,dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,dt.$$

Bew.: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv'$, es folgt die Beh. □

16.6. Bsp.: • $\int^x \ln(t)\,dt = \int^x 1\cdot\ln(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} x\ln(x) - \int^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt = x\ln(x) - x$ (für $x>0$).

$u'=1, v=\ln(t) \rightsquigarrow u=t, v'=\frac{1}{t}$

• $\int^x t3^t\,dt \underset{\uparrow}{=} 3^t\cdot\frac{t}{\ln(3)} - \int^x 3^t\frac{dt}{\ln(3)} = \frac{3^t t}{\ln(3)} - \frac{3^t}{\ln^2(3)}$

$u'=3^t, v=t$

16.7. **Substitutionsregel:** Sei $\varphi : I \to J$, I echtes IV, φ diff'bar, $f : J \to \mathbb{R}$ stetig.

$\int^x f(\varphi)\varphi' = \int^{\varphi(x)} f$

Beh.: $$\int^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int^{\varphi(x)} f(s)\,ds.$$

"Läuft t bis x, so läuft $s=\varphi(t)$ bis $\varphi(x)$"

Bew.: Ist F SF zu f, so gilt laut Kettenregel
$$(F\circ\varphi)' = F'(\varphi)\cdot\varphi' = f(\varphi)\cdot\varphi' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi',$$
also ist eine SF von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ bei x gleich $(F\circ\varphi)(x) = F(\varphi(x)) = \int^{\varphi(x)} f(t)\,dt$. □

16.8: Bsp: Sei $\varphi(t) \neq 0$ für alle t. Dann: $\int^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int^{\varphi(x)} \frac{ds}{s} \underset{!}{=} \ln|\varphi(x)|$.

Bew. für „$\underset{!}{=}$": Sei $f(s) = \frac{1}{s}$, und für $x \neq 0$ ist $|x|' = \operatorname{sign}(x)$,
wir haben $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\cdot\operatorname{sign}(x) = \frac{1}{x}$. □

Bsp.: • $\int^x \frac{2t}{t^2}\,dt = \int^{x^2}\frac{ds}{s}$ gilt, denn l.S. $= \int^x \frac{2}{t}\,dt = 2\ln|x|$, r.S. $= \int^{x^2}\frac{ds}{s} = \ln|x^2| = 2\ln|x|$ ✓

• $\int^x \frac{-\sin t}{\cos^2 t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int^{\cos x} t^{-2}\,dt = -\frac{1}{\cos x}$.

$f(t) = \frac{1}{t^2}, \varphi(t) = \cos t \rightsquigarrow F(t) = \frac{1}{t}$

16.9. **Variante der Substitutionsregel:** In einem IV, wo φ' konstantes VZ hat (wenn dort φ' keine Nst. hat), ist φ umkehrbar. Sei $\psi = \varphi^{-1}$ die zugehörige Umkehrfkt., es gilt damit also $\psi'(t) = \frac{1}{\varphi'(t)}$, und 16.7. liefert (vertausche s mit t):
$$\int^{\varphi(x)} f(\psi(s))\psi'(s)\,ds = \int^x f(t)\,dt.$$

Bsp.: $\int_0^1 3^{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} t3^t\,dt$ mit $\psi(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(t) = t3^t$, $\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ $\rightsquigarrow 1 = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(1) = \sqrt{3}$

16.10. Bem.: Funktionen, die nicht elementar integrierbar sind, sind z.B. e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$.

16.11. Im folgenden bringen wir die Verbindung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen in Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Dieser hat zwei Teile: Teil 1 besagt, dass mit einer SF F des Integranden f ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ berechnet werden kann, und Teil 2 besagt, dass mit einer Integralfunktion $F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$ eine SF von f vorliegt.

16.12. Hauptsatz (HDI, Teil 1):

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int'bar,

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, F diff'bar in $]a,b[$, $F' = f$ (d.h. F ist SF von f).

Beh.: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F\big|_a^b = F(x)\big|_a^b = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$.

Bew.: Für $\varepsilon > 0$ $\exists\, h, k \in \mathcal{E}$ mit $h \le f \le k$ und $S(k-h) < \varepsilon$.

Wähle eine gemeinsame Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ von h und k.

MWS auf F liefert: $\exists\, \xi_j \in]x_{j-1}, x_j[$ mit

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}).$$

Damit ist
$$Sh = \sum_{j=1}^m h(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^m (F(x_j) - F(x_{j-1}))$$
$$= F(b) - F(a) \le \sum_{j=1}^m k(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = Sk,$$

also:
$$Sh \le F(b) - F(a) \le Sk$$
$$\downarrow \varepsilon\to 0 \qquad\qquad \downarrow \varepsilon \to 0$$
$$\int_a^b f(t)\,dt \le F(b) - F(a) \le \int_a^b f(t)\,dt,$$ also die Beh. □

16.13. Bsp.: (1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$. (2) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin\big|_0^{\pi/2} = 1$.

16.14. Situation: Sei $J \subseteq \mathbb{R}$, J echtes IV, $f : J \to \mathbb{R}$ „lokal integrierbar",

d.h. $\forall$ IVe $[\alpha, x] \subseteq J$: $f\restriction_{[\alpha,x]}$ int'bar.

Dies gilt etwa, wenn J abgeschlossen und beschränkt und f stetig, also glm. stetig (vgl. 15.26 / 10.8).

Def.: Für $\alpha \in J$ fest definiere $F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$ für alle $x \in J$,

erhalten eine Funktion $F : J \to \mathbb{R}$, die wir Integralfunktion nennen.

16.15. Satz: Eine Integralfunktion wie in 16.14 ist stetig (sogar "lokal dehnungsbeschränkt" / "Lipschitz-stetig").

Bew.: Für $x_0, x \in J$ ist $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \le M|x - x_0| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

(wo $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq J$, auf dem $\exists\, M$ mit $|f| \le M$). □

16.16. Hauptsatz (HDI, Teil 2): Sei wie in 16.14 f und F geg. und f in $x_0 \in J$ stetig.

Dann ist F in x_0 diff'bar, $F'(x_0) = f(x_0)$.

Korollar: f stetig $\Rightarrow$ F diff'bar, $F' = f$.

Bew.: $\left|F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|$

$\leq |x-x_0| \sup_t |f(t)-f(x_0)|$ über $t \in [x_0,x] \cup [x,x_0] \subseteq J$.

Somit:

Sei $r(x) := \dfrac{F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$,

also $|r(x)| \leq \sup_t |f(t)-f(x_0)| \xrightarrow{x \to x_0} 0$, da f stetig in x_0,

d.h. $r(x)$ ist in x_0 stetig, und $r(x_0)=0$.

Es folgt die Beh. mit 11.4(3). $\square$

16.17. **Bem.:** Man kann Teil 1 des HDIs auch aus Teil 2 herleiten:

Betrachtet man die Integralfkt. $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, so ist diese laut Teil 2 eine SF von f. Da auch F laut Vor. in Teil 1 eine SF ist, gilt $G(x) = F(x)+c$, also wegen $G(a)=0$ haben wir $c=-F(a)$.

Daher folgt $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = F(b)+c = F(b)-F(a)$. $\square$

16.18. **Bsp.:** 1) Man berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = 9-x^2$ und $g(x) = 1-\frac{x^2}{9}$ eingeschlossen wird.

Berechne die Schnittpunkte durch: $9-x^2 = 1-\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow 8 = \frac{8}{9}x^2 \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$.

Die gesuchte Fläche ist: $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx - \int_{-3}^{3} g(x)\,dx = \int_{-3}^{3}(f(x)-g(x))\,dx = \int_{-3}^{3}\left(8-\frac{8}{9}x^2\right)dx$

$$= 8x\Big|_{-3}^{3} - \frac{8}{27}\cdot x^3\Big|_{-3}^{3} = 8\cdot(3+3) - \frac{8}{27}\cdot(27+27)$$

$$= 8\cdot 6 - 8\cdot 2 = 8\cdot 4 = \underline{\underline{32}}.$$

2) Man berechne den Flächeninhalt des Vierteleinheitskreises,

d.h. der Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ($=: y$ erfüllt $x^2+y^2=1$, d.h. $(x,\underbrace{f(x)}_{=y})$ liegt auf dem Einheitskreisrand).

Dieser ist $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\substack{t=\sin(x) \\ \varphi(x)=\sin(x), \\ dt=\cos(x)dx}}{=} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,dx$

$$\underset{\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Der volle Einheitskreis hat dann den Flächeninhalt π.

<u>Kleine Integraltafel:</u>

$f(x),\ F'(x)$	$\int^x f\,dt,\ F(x)$	Bemerkung
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$x>0,\ \alpha\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x\neq 0$
e^x	e^x	
$\ln x$	$x\ln x - x$	$x>0$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1+(\tan x)^2$	$\tan x$	$x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\lvert x\pm\sqrt{x^2+a^2}\rvert$	$a\neq 0,\ x^2+a>0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{(\cosh x)^2} = 1-(\tanh x)^2$	$\tanh x$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$x>1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$	

Anhang:

Die "Hauptsatz Kantate" von Friedrich Wille aus dem Buch "Humor in der Mathematik" ist eine musikalische Umsetzung des HDIs.

- Teil 2 des HDIs ist genau die 1. Strophe:

"Es sei f stetige Funktion auf einem Intervall.
Dann existiert von a bis x dazu das Integral.
Fasst x man als Variable auf, erhält man hohen Lohn:
Dies ist von f die (aller-)schönste Stammfunktion."

- Teil 1 des HDIs ist genau die 2. Strophe:

"Das Integral von a bis x errechnet man nun leicht.
Mit einer Stammfunktion von f ist's alsobald erreicht.
Man subtrahiert in b und a, - das ahnen alle schon -
die Werte dieser (wunder-) schönen Stammfunktion."