Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K Halupczok

An 17: Stammfunktionen rationaler Funktionen

Stichworte: Stammfunktionen rationaler Funktionen, Polynomdivision, Nullstellenabspaltung, Hauptsatz der Algebra, Partialbruchzerlegung

17.1. Einleitung: Wir beschreiben eine Methode zur Auffindung von Stammfunktionen rationaler Funktionen der Form $\frac{p}{q}$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Nach Polynomdivision genügt es, den Fall $\deg p < \deg q$ zu betrachten. Dann wird q als Produkt von Linearfaktoren geschrieben, nach einer Partialbruchzerlegung wird die S.F. gefunden.

17.2. Stammfunktionen rationaler Funktionen

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $\deg q =: n \geq 1$. Mit $f = \frac{p}{q}$ ist eine rationale Fkt. geg., vgl. 9.25.
Wir beschreiben das Verfahren zur Auffindung einer SF von f.

17.3. Bsp.: Sei $f(x) = (3x^5 + 9x^4 - 28x^3 + 13x^2 + 6x - 59) : (x^2 + 3x - 10)$.

0) Polynomdivision / Div. mit Rest 17.4 liefert
$$f(x) = 3x^3 + 2x + 7 + \frac{5x+11}{x^2+3x-10}.$$
Eine SF von $3x^3 + 2x + 7$ ist $\frac{3}{4}x^4 + x^2 + 7x$.
Gesucht ist noch eine SF von $\frac{5x+11}{x^2+3x-10}$, wo $\deg$ Zähler $< n$.
(Allg.: $\frac{p}{q} = \text{Polynom} + \frac{\tilde{p}}{q}$, wo $\deg \tilde{p} < \deg q = n$.)

1) Bestimme die Nullstellen des Nenners q (hier quadratisches Polynom).
Hier: $2, -5$, somit ist $q = (x-2)(x+5)$.

2) Finde Darstellung $\frac{5x+11}{(x-2)(x+5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5}$, also finde a, b.
$\rightsquigarrow$ "Partialbruchzerlegung"

- Multipliziere dazu mit $q \rightsquigarrow 5x + 11 = a(x+5) + b(x-2) = (a+b)x + 5a - 2b$.
- Koeffizientenvergleich liefert $5 = a + b$, $11 = 5a - 2b$
(LGS, n Glgn. in n Unbekannten)

Hier: $a = 3$, $b = 2$. Somit: $\frac{\tilde{p}}{q} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5}$.

3) Finde SF für $\frac{1}{x-\alpha}$, hier $\alpha \in \mathbb{R}$: $\int^{x} \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha|$,

Ergebnis: SF zu $f = \frac{p}{q}$ ist $\frac{3}{4}x^4 + x^2 + 7x + 3\ln|x-2| + 2\ln|x+5|$.

Polynomdivision

17.4. Euklidischer Algorithmus (Division mit Rest) für Polynome / Satz von der Polynomdivision: Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$.

Beh.: $\exists!\, S, R \in \mathbb{C}[z]$ mit $\deg R < \deg q = n$ und $p = S \cdot q + R$.

Bsp.: • $\underbrace{(x^2-2)}_{p} : \underbrace{(x-1)}_{q} = \underbrace{x+1}_{=P} - \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{=\frac{R}{q}}$, denn $x^2-2 = (x+1)\cdot(x-1) \underbrace{-1}_{\text{Rest bei der Division}}$

Verfahren: $(x^2-2) : (x-1) = x + 1 + \frac{-1}{x-1}$ ← Rest

$$\begin{array}{l}
(x^2-2) : (x-1) = x+1 + \frac{-1}{x-1} \\
\underline{-(x^2-x)} \\
\quad x-2 \\
\quad \underline{-(x-1)} \\
\quad\quad -1 \leftarrow \text{Rest}
\end{array}$$

• $(3x^5+9x^4-28x^3+13x^2+6x-59) : (x^2+3x-10) = 3x^3+2x+7+ \frac{5x+11}{x^2+3x-10}$ ← Rest

$$\begin{array}{l}
(3x^5+9x^4-28x^3+13x^2+6x-59) : (x^2+3x-10) = 3x^3+2x+7 + \frac{5x+11}{x^2+3x-10} \\
\underline{-(3x^5+9x^4-30x^3)} \\
\qquad 2x^3+13x^2+6x \\
\qquad \underline{-(2x^3+6x^2-20x)} \\
\qquad\qquad 7x^2+26x-59 \\
\qquad\qquad \underline{-(7x^2+21x-70)} \\
\qquad\qquad\qquad 5x+11
\end{array}$$

$5x+11$ ← Rest $\neq 0$, Polynomdiv. geht nicht auf

17.5. Def.: • Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ wie in 9.24 bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[X] = \{P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j;\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$.
Schreiben auch $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ oder $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ für P.

• Ein Polynom der Form X^i heißt ein Monom. Das Polynom $P=0$ (mit $a_0=0$) heißt Nullpolynom. Ist $P \neq 0$, so heißt $n := \max\{k \in \mathbb{N}_0;\ a_k \neq 0\}$ der Grad von P, a_n heißt dann der Leitkoeffizient von P. Schreiben $\deg P = n$, es sei $\deg 0 := -1$ (auch: $-\infty$). Ist der Leitkoeffizient $=1$, so heißt P normiert. Polynome vom Grad 1 heißen linear.

• Jedes Polynom $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ erzeugt eine Fkt. auf $\mathbb{K}$, die Polynomfunktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

• Für Polynome $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ und $Q=b_0+b_1X+\dots+b_mX^m \in \mathbb{K}[X]$ mit $n \geq m$, man setze dabei $b_{m+1}:=0,\dots,b_{n-1}:=0, b_n:=0$ falls $m<n$,
def. $P+Q := (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\dots+(a_n+b_n)X^n \in \mathbb{K}[X]$
und $P \cdot Q := c_0+c_1X+\dots+c_{n+m}X^{n+m} \in \mathbb{K}[X]$
mit $c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$, d.h. $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0, \dots$ usw.
(vgl. Cauchyproduktsatz 7.28).

17.6. Bem.: • $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1 (und heißt Polynomring), d.h. es gelten die Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M3), (D) in 2.2.
• Für alle Polynome $P,Q \in \mathbb{K}[X]$ gilt: $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, und ist $P \neq 0 \neq Q$, gilt: $\deg(P\cdot Q) = \deg(P)+\deg(Q)$.
• Im Satz 17.4 von der Polynomdivision nennt man R den Rest der Polynomdivision von p durch q, und S den Quotienten (der ..."...).
Polynomringe erlauben also eine Division mit Rest, genau wie im Ring $\mathbb{Z}$.
• Beweis von 17.4 s. Anhang.

(wie etwa $253 : 17 = 14$
$\begin{array}{r} 253 \\ \underline{17} \\ 83 \\ \underline{68} \\ 15 \end{array}$ ← Rest 15 → Also: $\underbrace{253}_{P} = \underbrace{14}_{S} \cdot \underbrace{17}_{q} + \underbrace{15}_{R}$)

Nullstellenabspaltung

17.7. Def.: Ein El. $x_0 \in \mathbb{K}$ heißt Nullstelle des Polynoms $P \in \mathbb{K}[X]$, wenn x_0 Nullstelle der zugeh. Polynomfkt. $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto P(x)$ ist, also $P(x_0)=0$ gilt.

17.8. Kor.: Genau dann ist x_0 Nullstelle eines Polynoms $P \in \mathbb{K}[X]$, wenn es eine Faktorisierung $P=(X-x_0)\cdot S$ mit $S \in \mathbb{K}[X]$ gibt.
d.h. Zerlegung in ein Produkt (von nichttrivialen Faktoren)
"Nullstellenabspaltung" / "Abspaltung eines Linearfaktors"

Bew.: • Ist x_0 Nullstelle von P, so erhalten wir als Spezialfall von Satz 17.4 für P die Darstellung $P = S\cdot(X-x_0)+R$ mit $R,S \in \mathbb{K}[X]$, und $\deg R < 1$, also ist $R \in \mathbb{K}$, und zwar $R = \underbrace{P(x_0)}_{=0} - S(x_0)\cdot\underbrace{(x_0-x_0)}_{=0} = 0$, die Beh. • Umgekehrt folgt aus dieser Darstellung unmittelbar, dass x_0 Nullstelle von P ist. $\square$

17.9. **Bem.:** • Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n p.w.v. Nullstellen.
• Ein Faktor der Form $X - x_0$ heißt Linearfaktor. paarweise verschiedene
• Ist $\mathbb{K}$ unendlich, so gehören zu $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq Q$, auch verschiedene Polynomfunktionen.
⌈Wäre nämlich $P(x) = Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$, so hätte $P - Q$ unendl. viele Nullstellen.⌋
• Nicht jedes Polynom besitzt eine Nullstelle, wie z.B. $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Als Polynom in $\mathbb{C}[X]$ aufgefasst hat es aber Nullstellen, nämlich $i, -i$.
Dies folgt (für jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$) aus 17.10:

17.10. **Fundamentalsatz (Hauptsatz) der Algebra:** Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $\deg P \geq 1$ besitzt eine Nullstelle (in $\mathbb{C}$). ⌈ohne Beweis; Beweis siehe in Vorlesungen zur Funktionentheorie, Algebra, ... auch elementar-analytisch möglich, s. z.B. [Heuser, Satz 69.1 / Aufg. 7/8 in Nr. 187]⌋

Daraus folgt sofort:

17.11. **Kor.:** Jedes Polynom P über $\mathbb{C}$ mit $\deg P \geq 1$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren, d.h. ist Produkt von Polynomen vom Grad 1.

17.12. **Bsp.:** • $X^4 - 5X^3 + 3X^2 - 10X + 2 = (X^2 - 5X + 1) \cdot (X^2 + 2)$
$$= \left(X - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \cdot \left(X - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \cdot (X - i\sqrt{2}) \cdot (X + i\sqrt{2})$$
• $X^3 - 2X^2 + X = X \cdot (X^2 - 2X + 1) = X \cdot (X - 1)^2$

17.13. **Kor.:** Sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann ex. $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = \alpha \prod_{\ell=1}^{r} (z - \alpha_\ell)^{k_\ell}$, dabei heißt k_ℓ die Multiplizität/Vielfachheit der Nullstelle α_ℓ. Es gilt $k_1 + \dots + k_r = \deg p$.

Es gilt folgender Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung wie in 17.3.2) am Bsp. gezeigt:

17.14. **Satz von der Partialbruchzerlegung:**
Vor.: $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q(z) = \prod_{\ell=1}^{r} (z - \alpha_\ell)^{k_\ell}$, sei $\deg p < \deg q = n$.
Beh.: $\exists$ eindeutig bestimmte $c_{\ell,j} \in \mathbb{C}$ für $\ell \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, k_\ell\}$, mit
$$\boxed{\frac{p}{q}(z) = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_\ell} \frac{c_{\ell,j}}{(z - \alpha_\ell)^j}.}$$
Bew.: s. Anhang.

17.15. <u>Bsp.:</u> $\frac{5x^2-5x-3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{b}{x+2}$ hat Lösungen für $a_1, a_2, b \in \mathbb{C}$ laut 17.14.
Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert wieder ein Lineares Gleichungssystem dafür, das die Lösung $a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ b = 3$ hat.
⌈Check: $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}\left(2(x-1)(x+2) - (x+2) + 3(x-1)^2\right)$
$= 2(x^2+x-2) - x - 2 + 3(x^2-2x+1) = 5x^2-5x-3$ ✓⌋

Zum Auffinden von SFen solcher Ausdrücke genügt jetzt die Lösung von folgendem

17.16. <u>Problem:</u> Gesucht ist eine SF zu $\frac{1}{(z-\alpha)^k}$ für $\alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$.

- Falls $k \geq 2$, ist $\frac{1}{1-k}(z-\alpha)^{1-k}$ eine SF.
- Falls $k = 1$: Setze $u = \mathrm{Re}(\alpha),\ v = \mathrm{Im}(\alpha)$.
  - * Falls $v = 0$, ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{u\}$ dann $\ln|x-u|$ eine SF.
  - * Falls $v \neq 0$, haben wir $\frac{1}{x-\alpha} = \frac{x-\bar\alpha}{(x-\alpha)(x-\bar\alpha)} = \frac{(x-u)+vi}{(x-u)^2+v^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-u)}{(x-u)^2+v^2} + i\cdot\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-u}{v}\right)^2+1}$,
    eine SF davon ist $\frac{1}{2}\ln\left((x-u)^2+v^2\right) + i\arctan\left(\frac{x-u}{v}\right)$.

Man kann in letzterem Fall noch Terme mit SFen zu Paaren von komplex konjugierten Nullstellen des Nenners q weiter zusammenfassen, vgl. [Hoff, 5.1.3] für eine reelle Version.
Mit [Hoff, 5.1.4, 5.1.5] kann man die S.F. weiterer, spezieller algebraischer/transzendenter Fktn. bestimmen.

Anhang

17.17. **Beweis von Satz 17.4 von der Polynomdivision:**

- <u>Existenz</u> von R und S: Klar für $\deg p < \deg q$: dann ist $S = 0,\ R = p$.
  Somit können wir OE $\deg p \geq \deg q$ annehmen.
  Dann führen wir eine vollst. Ind. nach $n = \deg p$:
  <u>Ind.anf.:</u> $n = 0$: Dann ist $p = a_0,\ a_0 \neq 0$, und auch $\deg q = 0$, also $q = b_0 \neq 0$.
  Haben dann $p = a_0 b_0^{-1} \cdot q + 0$.
  <u>Ind.schritt:</u> $\deg P \leq n-1 \rightsquigarrow \deg P = n$: Seien $p = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n,\ a_n \neq 0$,
  und $q = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m,\ b_m \neq 0$,
  und $m \leq n$. Betr. $P_1 := p - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot q$ mit $\deg P_1 < n$. "Echt kleiner n"
  Für $\deg P_1 < \deg q$ folgt nach obigem, für $\deg P_1 \geq \deg q$ folgt nach Induktionsvor., dass $\exists\, R_1, S_1 \in K[X]: P_1 = S_1 q + R_1,\ \deg R_1 < \deg q$.
  Dann folgt $p = P_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot q = \left(S_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}\right)\cdot q + R_1$ mit $\deg R_1 < \deg q$.
  Also: $S = S_1 + \frac{a_n}{b_m}\cdot X^{n-m},\ R = R_1$ liefert die Ind.beh.

• Eindeutigkeit: Aus $p = S_1 q + R_1$, $\deg R_1 < \deg q$ und $p = S_2 q + R_2$, $\deg R_2 < \deg q$, folgt durch Differenzenbildung: $R_2 - R_1 = (S_1 - S_2) \cdot q$. Wäre $S_1 - S_2 \neq 0$, folgte mit $\deg q \le \deg(R_2 - R_1) \le \max(\deg R_2, \deg R_1)$ ein Widerspruch. Also gilt doch $S_1 = S_2$ und damit auch $R_1 = R_2$. □

17.18. Beweis von Satz 17.14 von der Partialbruchzerlegung:

• Sei $q_{\ell,j} := \frac{q}{(z-\alpha_\ell)^j}$, dies sind mit $j \le k_\ell$ also $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ viele Polynome.

• Zeige zunächst: $L(\overbrace{z^0, z^1, \ldots, z^{n-1}}^{n \text{ viele}}) \overset{!}{=} L(\overbrace{q_{\ell,j};\ \ell \in \{1,\ldots,r\}, j \in \{1,\ldots,k_\ell\}}^{\text{auch } n \text{ viele}})$,
wo L die Lineare Hülle/Menge aller Linearkombinationen der Elemente sei.

Da $z^0, z^1, \ldots, z^{n-1}$ lin. unabh., gen. z.z.: die $q_{\ell,j}$ sind lin. unabh.
Dazu sei j fest (haben dann $\deg q_{\ell,j} = n-j$, $j \le n$), und
sei $\sum_{\ell=1,\ j \le k_\ell}^{r} \lambda_\ell q_{\ell,j} = 0$, die $\lambda_\ell \in \mathbb{C}$. Setze $\lambda_\ell := 0$ für $j > k_\ell$,
$j \le k_\ell$ ← Bedingung an ℓ loswerden! schreibe dann $\sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell q_{\ell,\underset{\uparrow \text{fest}}{j}} = 0$. $\boxed{\times}$

Beh.: $\lambda_\ell = 0$ für alle $1 \le \ell \le r$.

Bew. (Vollst. Ind. nach n). Ind.anf.: $n = 1$, dann ist $r = 1 = k$, $q_{1,1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ ✓

Ind.schritt: $n-1 \rightsquigarrow n$, wo $n \ge 2$:

1. Fall: $\exists t$ mit $k_t - j \ge 1$, es teilt $z - \alpha_{k_t}$ dann $q_{t,j}$ und damit alle $q_{\ell,j}$ (für $\ell \neq t$ sowieso). Teile also die $q_{\ell,j}$ in $\boxed{\times}$ durch $z - \alpha_{k_t}$, erhalte $\tilde{q}_{\ell,j}$ mit $\deg \tilde{q}_{\ell,j} = n-1$. Laut Ind.vor. ergibt sich $\lambda_\ell = 0$ für $1 \le \ell \le r$.

2. Fall: Sei also OE $k_\ell = j$ für alle ℓ, weiter (indirekt) gelte OE $\lambda_1 = -1 \neq 0$.
Dann folgt $\sum_{s=2}^{r} (z-\alpha_s)^j = \sum_{\ell=2}^{r} \lambda_\ell \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \ell}}^{r} (z-\alpha_s)^j$ aus $\boxed{\times}$.
Setze ein: $z = \alpha_1$,
dann ist die l.S. $\neq 0$, aber die r.S. $= 0$, ↯. Auch hier ergibt sich $\lambda_\ell = 0$ für $1 \le \ell \le r$.

• Wegen $\deg q_{\ell,j} = n-j$ sind dann alle $q_{\ell,j}$ lin. unabh.
d.h. $\exists$ eind. best. $c_{\ell,j} \in \mathbb{C}$ mit $\frac{p}{q} = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_\ell} \frac{c_{\ell,j}\, q_{\ell,j}}{q} = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_\ell} \frac{c_{\ell,j}}{(z-\alpha_\ell)^j}$.

□