Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 18: Funktionenfolgen, Potenzreihen

[Hoff, §3.3]

Stichworte: Supremumsnorm, gleichmäßige/punktweise Konvergenz, Majorantenkriterium von Weierstraß, Potenzreihen, Konvergenzradius

---

18.1. Einleitung: Wir führen die Supremumsnorm ein und damit die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolge, welche im Vergleich zur punktweisen Konvergenz stärker ist. Potenzreihen werden als Beispiel für Funktionenfolgen auf (gleichmäßige) Konvergenz hin untersucht.

18.2. Sei $I=[a,b]$, $-\infty<a<b<\infty$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) = \{f: I \to \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{B} = \mathcal{B}(I) = \{f \in \mathcal{F};\, f \text{ beschränkt}\}$, $\mathcal{T} := \mathcal{T}(I)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0(I)$.

Haben: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ sind Untervektorräume von $\mathcal{F}$.

18.3 Def. (Supremumsnorm): Für $f \in \mathcal{B}$ sei $\|f\| := \|f\|_{sup} := \sup\{|f(t)|;\, t \in I = [a,b]\}$.

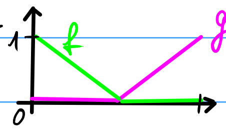
18.4. Bem.: $\|\cdot\|$ ist eine Norm, $\|\cdot\| : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit

(a) $\|f\| = 0 \iff f = 0$ (definit)
(b) $\alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ (homogen)
(c) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Δ-Ungl.)

(a)–(c) definieren eine "Norm"

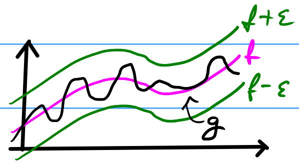
(d) $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ (submultiplikativ) ← ist nicht Teil der Def. einer "Norm". diese Eigenschaft erfüllt $\|\cdot\|_{sup}$ zusätzlich.

Bsp. für (d):



Hier ist $\|fg\| = 0$, aber $\|f\| = \|g\| = 1$, also $\|f\| \cdot \|g\| = 1$.

18.5. Bem.: $\|f-g\| \leq \varepsilon \iff \forall x: |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Anschaulich: "$\varepsilon$-Schlauch"



18.6. Def.: $\forall n$ sei $f, f_n \in \mathcal{B}$.

f_n konvergiert gleichmäßig gegen f (Notation: $f_n \rightrightarrows f$),
falls $\|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

18.7. Bem.: $f_n \rightrightarrows f \;\substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow}\; \forall x \in I: f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\left(\iff |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$.

Bezeichnung: Punktweise Konvergenz,
Notation: $f_n \xrightarrow{pktw} f$.

18.8. <u>Bsp.:</u> Sei $I=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$, $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}$.

Dann: $f_n \xrightarrow{ptw} f$. Aber: $\|f-f_n\|=1$, d.h. $f_n \not\rightrightarrows f$.

Bemerke: alle f_n stetig, aber die punktweise Grenzfunktion f ist unstetig!

18.9. <u>Satz:</u> Vor.: $\forall n$ sei $f, f_n \in \mathcal{B}$, $f_n \rightrightarrows f$.

Beh.: (a) $\forall n$: $f_n\in\mathcal{J} \Rightarrow f\in\mathcal{J}$ und $\int_a^b f_n\,dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f\,dt$.

(b) $\forall n$: $f_n\in\mathcal{C}\Rightarrow f\in\mathcal{C}$.

<u>Bew.:</u> (a): Dass $f\in\mathcal{J}$ folgt, liegt nicht auf der Hand; zitieren [Heuser, Satz 104.4] dafür.

Mit $f\in\mathcal{J}$ folgt $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n-f)\right| \le (b-a)\,\|f_n-f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b): Sei n fest so, dass $\|f_n-f\|\le \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Dann:

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)|$$
$$\le \|f-f_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n - f\| \le \varepsilon,$$

wobei für x fest und y mit $|x-y|<\delta$ dabei $|f_n(x)-f_n(y)|\le\frac{\varepsilon}{3}$ sein soll, denn $f_n\in\mathcal{C}$. □

18.10. <u>Beh.:</u> Punktweise Konvergenz als Voraussetzung in 18.9 ist unzureichend!

<u>Bsp. 1:</u> $f_n\in\mathcal{E}$, $f\in\mathcal{B}$, $f_n\xrightarrow{ptw} f \not\Rightarrow f\in\mathcal{J}$:

Es ist $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ abzählbar (da $\mathbb{Q}$ abzählbar, vgl. [Heuser, Satz 19.1]),

d.h. haben $A=\{a_j;\ j\in\mathbb{N}\}$. Dann sei $f(x)=\begin{cases}1,&x\in A,\\0,&x\notin A,\end{cases}$ $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

und $f_n(x):=\begin{cases}1,& x\in\{a_1,\dots,a_n\},\\0,&\text{sonst}\end{cases}$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$. Die f, f_n sind $\in\mathcal{E}$.

Aber: $f\notin\mathcal{J}$.

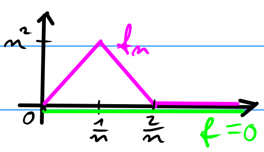
<u>Bsp. 2:</u> $(f_n)\subseteq\mathcal{C}$, $f\in\mathcal{B}$, $f_n\xrightarrow{ptw}f$, $f_n \not\Rightarrow f\in\mathcal{C}$:

Wähle $f_n = \underbrace{x^n}_{\in\mathcal{C}} \xrightarrow{ptw} f$ mit $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}$, aber $f\notin\mathcal{C}$. (ist 18.8)

Somit ist $\lim\limits_{x\to1-}\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{x\to 1-}\overbrace{f(x)}^{=0} = 0 \ne 1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to1-} x^n$.

Zwei Grenzwerte können also nicht beliebig vertauscht werden, falls nur ptw. Kgz. vorliegt!

<u>Bsp. 3:</u> $(f_n)\in\mathcal{J}$, $f\in\mathcal{E}$, $f_n\xrightarrow{ptw}f$, aber $\int_a^b f_n\,dt \not\xrightarrow{n\to\infty}\int_a^b f\,dt$.



$f_n\xrightarrow{ptw} f=0$, aber $\int_0^1 f_n\,dt = n \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 = \int_0^1 f\,dt$.

Zur gleichmäßigen Konvergenz von Reihen von Funktionen haben wir folgendes

18.11. Majoranten-Kriterium von Weierstraß:

Vor.: $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \gamma_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$,
wobei $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \|f_n\| \leq \gamma_n$.

Beh.: a) $\forall x \in [a,b] : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) =: f(x)$ ist absolut konvergent,
b) $f \in \mathcal{B}$ und $\|\sum_{j=1}^{m} f_j - f\| \xrightarrow{m\to\infty} 0$. Somit: $\sum_{j=1}^{m} f_j \rightrightarrows f$.

Bew.:

Zu a): Sei OE $n_0 = 1$, d.h. $\forall x \in [a,b] : |f_n(x)| \leq \|f_n\| \leq \gamma_n$
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Rightarrow$ Beh. laut Majorantenkriterium 7.17.

Zu b): • $|f(x)| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ für alle $x \in [a,b]$,
d.h. $f \in \mathcal{B}$.

• $\|\sum_{j=1}^{m} f_j - f\| = \|\sum_{j=m+1}^{\infty} f_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma_j \xrightarrow{m\to\infty} 0$
nach Cauchykriterium für Reihen 7.10. □

Bsp.: $\sum_{j=0}^{m} x^j \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$ für $x \in I = [a,b] \subseteq]-1,1[$.

18.12. Satz: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vor.: $(f_n) \subseteq \mathcal{C}^1$, $h \in \mathcal{B}$, $\|f_n' - h\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (d.h. $f_n' \rightrightarrows h$),
$\exists\, \xi \in [a,b]$ so dass $f_n(\xi) \xrightarrow{n\to\infty} \beta$ existiert.

Beh.: $\exists f \in \mathcal{C}^1$, $f' = h$, $f_n \rightrightarrows f$.

Bew.: Aus Satz 18.9(b) folgt $h \in \mathcal{C} = \mathcal{C}^0$, d.h. $\exists \int_a^b h\,dt$.
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Teil 1, Nr. 16.12)
ist $f_n(x) = f_n(\xi) + \int_\xi^x f_n'\,dt$.
Sei $f(x) := \beta + \int_\xi^x h\,dt$. Dann ist $f' = h$ und f stetig diff'bar.
Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(\xi) - \beta| + \left|\int_\xi^x (f_n' - h)\,dt\right| \\
&\leq |f_n(\xi) - \beta| + |x - \xi| \cdot \|f_n' - h\| \\
&\leq |f_n(\xi) - \beta| + (b-a)\,\|f_n' - h\| \quad \text{für alle } x \in [a,b],
\end{aligned}
$$

d.h. es gilt $\|f_n - f\| \leq |f_n(\xi) - \beta| + (b-a) \cdot \|f_n' - h\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

18.13. **Bem.:** f_n diff'bar, $f_n \rightrightarrows f$ impliziert nicht f diff'bar!
Bsp.: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \rightrightarrows |x| = f(x)$ auf $[-1,1]$, f nicht diff'bar
⌜denn $0 \le f_n(x) - f(x) \le \frac{1}{n}$ für alle $x \in [-1,1]$.⌟

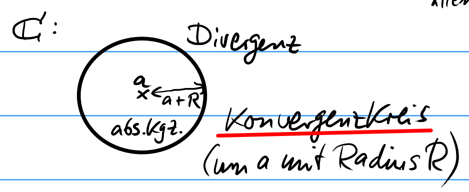
18.14. **Bem.:** f diff'bar impliziert nicht $f_n' \rightrightarrows f'$!
Bsp.: $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann: $\|f_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$.
Trotzdem: $f_n' = \cos(nx) \not\rightrightarrows 0$.

Zu Potenzreihen: Diese sind wichtige Funktionenfolgen.
Hatten das Wurzelkriterium: Sei $a_n \in \mathbb{C}$, Frage: Wann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs. kgt.?
Sei $L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Hatten: $L < 1 \Rightarrow$ abs. kgz.
$L > 1 \Rightarrow$ div.

18.15. Eine Potenzreihe über $\mathbb{C}$ ist eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ für $a, a_k \in \mathbb{C}$ ← (Funktionenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$)
(aufgefasst als Fkt. in $z \in \mathbb{C}$).
Dann ist $\sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-a|$. Das Wurzelkriterium liefert somit:
1. Fall: $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Fall: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$.

Bem.: auch $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls dies kgt. ist

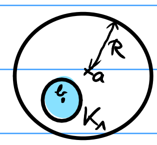
Besonders interessant:
18.16. 3. Fall: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \left]0, \infty\right[$, sei $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
Dann: Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ für $|z-a| > R$, (← dann ist $\sqrt[n]{|a_n| \cdot |z-a|^n} > \frac{|z-a|}{R} > 1$ (für ∞ vielen)
und absolute Konvergenz für $|z-a| < R$. (← " $\sqrt[n]{|a_n| \cdot |z-a|^n} < \frac{|z-a|}{R} < 1$ (für fast allen)



Nennen dann R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$
und $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < R\}$ heißt Konvergenzkreis.
Im Falle reeller Potenzreihen (die $a, a_k, z \in \mathbb{R}$) spricht man von einem Konvergenzintervall (der Länge $2R$, nämlich $\left]a-R, a+R\right[$).
Wir nennen a den Mittelpunkt des Konvergenzkreises/intervalls, bzw. Entwicklungspunkt der Potenzreihe, was mit Kapitel An19 klar wird.

18.17. **Bem.:** Vor.: $R>0$, $0<r<R$, $|a-b|<R$, R der Kgz.radius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$.
sei $K_1 := \{|w-b| \le r\} \subseteq \{|z-a|<R\}$ ein abgeschlossener Kreis um b mit Radius r.

Beh.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ konvergiert gleichmäßig auf K_1.



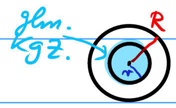
Bew.: Sei OE $a=b$, $w \in K_1$. Dann ist
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \underbrace{|w-a|}_{\le r}{}^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z|^k \text{ mit } r<|z|<R,$$
also ist die Potenzreihe glm. kgt. auf K_1 nach 18.11. $\square$

18.18. **Satz zur Differenzierbarkeit von Potenzreihen:**
Vor.: $0<R\le\infty$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $|x-a|<R$, $x \in \mathbb{R}$.
Beh.: f ist diff'bar,
und es ist $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0} a_n \frac{n}{x-a} \cdot (x-a)^n$.

Bew.: Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ ist R denn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot \frac{n}{|x-a|}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Für $f_m := \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k$ konvergiert $f_m' \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} =: h$
gleichmäßig für $|x| \le r < R$ laut 18.17.

Nach Satz 18.12: $f_m(a)$ kgt. $\Rightarrow \exists f,\ f' = h,\ f_m \Rightarrow f$ (auf $|x|\le r$) $\square$

18.19. **Bem. zur gleichmäßigen Konvergenz:**



- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ kgt. nicht glm. auf $|z-a|<R$, aber:
- Falls $r<R$, so kgt. die Reihe glm. auf $|z-a|<r$ ("lokal glm. kgt.")

Offenes Problem: "Rand"fall $|z-a|=R$.
Sei $0<R<\infty$, OE $a=0$.

im $\mathbb{R}$-Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R=1$, div. für $x=\pm 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $R=1$, div. für $x=1$, kgt. für $x=-1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $R=1$, kgt. für $x=\pm 1$.

$\rightarrow$ Auf dem Kreisrand kann Kgz./Div. eintreten und muss gesondert untersucht werden.