Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 19: Taylorreihen

[Hoff, §6.2]

Stichworte: Satz von Taylor, 1. MWS der $\int$-Rechnung, Lagrange-Restglied, Potenzreihenentwicklungen in Beispielen

---

19.1. Einleitung: Manche Funktionen lassen sich als Potenzreihe darstellen. Wie man eine solche Potenzreihendarstellung finden kann, liefert der Satz von Taylor zur Entwicklung von Funktionen in eine Potenzreihe. Wie gut die Approximation mit den ersten n Gliedern der Potenzreihe ist, besagen Abschätzungen des zugehörigen Restglieds.

19.2. Situation: Sei $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, I ein echtes IV, $n \in \mathbb{N}_0$.

Def. $\mathcal{C}^n(I) := \{ f : I \to \mathbb{R};\ f$ n-mal diff'bar, $f^{(n)}$ stetig$\}$

als die Menge der n-mal stetig diff'baren Funktionen auf I.

19.3. Satz (von Taylor / Taylorreihenentwicklungssatz / Taylorformel):

Sei $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, I echtes IV.

Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Dann gilt $\forall x \in I$:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}}_{=:\, P_n(x) = P_n(x;a)} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{=:\, R_n(x) = R_n(x;a)}}$$

Dabei heißt $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ das n-te Taylorpolynom

und $R_n(x)$ das n-te Restglied

in der Taylorentwicklung / Potenzreihenentwicklung von f im Punkte a.

Man nennt a den Entwicklungspunkt der Taylorentwicklung.

19.4. Bem.: Mit dem Taylorpolynom P_n erhoffen wir eine gute Approximation an $f(x)$, die sich gut numerisch durchführen lässt. Die zugehörige Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$ heißt Taylorreihe, s. Def. 19.9.

19.5. **Bew.** (durch vollst. Ind. über n):

Ind. anfang $n=0$: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ ist genau der Hauptsatz 16.12.

Ind. schritt $n-1 \rightsquigarrow n$: $R_{n-1}(x) = \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{u'} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v}\,dt$

$$\underset{\text{partiell integrieren}}{=} -\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u} \underbrace{f^{(n+1)}}_{v'}(t)\,dt$$

$$= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

Einsetzen dieser Formel in die Induktionsvor. ergibt die Induktionsbeh. $\square$

19.6. **Zusatz zum Taylor-Satz:** Für $m \in \mathbb{N}_0$, $m \le n$, gilt $P_n^{(m)}(a) = f^{(m)}(a)$.

Bew.: $\left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\cdot\frac{(x-a)^k}{k!}\right)^{(m)}\Big|_{x=a} = \underbrace{m!\cdot\frac{f^{(m)}(a)}{m!}}_{\text{von Term mit } k=m} + 0 = f^{(m)}(a)$. $\square$

19.7. **Kor. zum Taylor-Satz:** $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, $f^{(n+1)} = 0$ (konstant 0 auf I) $\Rightarrow f$ ist Polynom, $\deg f \le n$.
[Setze $f^{(n+1)} = 0$ in Taylorformel ein.]

Erinnern an
den 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (s. 15.28):

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f, g \in \mathcal{J}(\underbrace{[a,b]}_{\text{als } I})$, $g \ge 0$ (oder $g \le 0$).

Beh.: a) $\exists \mu \in [\inf f, \sup f]$: $\int_a^b fg\,dt = \mu \int_a^b g\,dt$.

b) Falls f stetig ist, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi)$.

Erhalten damit eine Formel für das

19.8. **Restglied nach Lagrange:**

$\forall x \in I\ \exists \xi \in\,]a,x[$ (bzw. $]x,a[$) mit $R_n(x;a) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Bew.: Sei OE $x > a$.

Dann ist $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
laut MWS der $\int$-Rg. 15.28 $\square$

Kor.: In 19.8 ist $R_n(x;a) = \eta(x)\cdot(x-a)^n$ mit einer Fkt. $\eta(x) \xrightarrow{x\to a} 0$. Nämlich $\eta(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(a)\right)$, $\xi = \xi(x)$.

19.9. **Def.:** Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(I) := \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{C}^n(I) \subseteq \mathcal{F}(I)$.

Dann heißt
$$T(f)(x) := \sum_{k=0}^\infty f^{(k)}(a)\cdot\frac{(x-a)^k}{k!}$$
die Taylorreihe von f in a.

19.10. **Bem.:** 1. Für $x \in I$ ist die Taylorreihe in x nicht notwendig konvergent.

2. Wenn die Taylorreihe konvergent in x ist, dann nicht notwendig gegen $f(x)$.

Standardbsp.: Zu 1.: $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}\cos(k^2 x)$ ist nur in $x=0$ Taylor-kgt. [ohne Bew.]

Zu 2.:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0,\\ 0 & \text{für } x = 0.\end{cases}$$
Dann: $T(f)(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{0}{n!}x^n = 0 \neq f(x)$.

19.11. **Bem.:** Für $x \in I$ gilt: $f(x) = \sum_{k=0}^\infty f^{(k)}(a)\cdot\frac{(x-a)^k}{k!} \iff R_n(x;a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

19.12. **Satz:** Für eine Potenzreihe $f = \sum_{k=0}^\infty c_k(x-a)^k$ gilt $f^{(n)}(a) = n!\,c_n$ für alle $n \geq 0$.

Bew.: $f'(x) = \sum_{k=0}^\infty k c_k (x-a)^{k-1}$, $f''(x) = \sum_{k=1}^\infty k(k-1)c_k(x-a)^{k-2}$, $\ldots \overset{\text{Vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow}} f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^\infty k(k-1)\cdots(k-n+1)\,c_k(x-a)^{k-n}$,

also $f^{(n)}(a) = n!\,c_n$ (nur Term mit $k=n$ bleibt). □

19.13. **Kor.:**

a) Um einen festen Entwicklungspunkt a gibt es für eine Fkt. höchstens eine Potenzreihenentwicklung.

b) Für $f = \sum_{k=0}^\infty a_k(x-a)^k$ gilt $T(f) = f$. [Speziell wenn f Polynom.]

nahe 0 gute Appr.!
$\underbrace{P_0 = 1,\ P_2 = 1 - \frac{t^2}{2},\ P_3 = P_2 + \frac{t^4}{4!}}$ ...

19.14. **Bsp.:** (a) $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ (b) $\sin x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (c) $\cos x = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(d) $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$ (= t + höhere Potenzen in t), wo $t \in]-1,1[$,

bzw. $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n} \left(= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \ldots\right)$.

(e) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \left((-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} - (-1)^{n-1}\frac{(-t)^n}{n}\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}\left(1-(-1)^n\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, wo $t \in]-1,1[$.

(f) $\arctan(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ für $t \in]-1,1[$,

denn $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^\infty (-t^2)^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^{2n} = \arctan'$. [vgl. 18.18.]

(g) $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

(h) Für $x \in]-1,1[$ ist $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$ in jedem abgeschlossenen Teil-IV von $]-1,1[$ glm. kgt.

$\Rightarrow \arcsin(x) = \int_0^x \arcsin'(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \binom{-1/2}{n}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

19.15. Approximation von $\ln(2)$: • In (d) ist $t=1$ möglich laut Abelschem GW Satz [Heuser, §65].
• In (d) mit $t=1$ erhält man aber eine schlechte/langsame Appr. an $\ln(2)$:
Nach $n=10^6$ Summanden wird $\frac{1}{10^6}$ addiert, d.h. 10^{-6} ist Fehler/Restabschätzung.
• In (e) mit $t=\frac{1}{3}$ erhält man eine gute/schnelle Appr. an $\ln(2)$:
$\ln(2)=\ln\left(\frac{1+1/3}{1-1/3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^7+\dots\right)$, die ersten 6 Summanden haben einen Rest $\leq \frac{2}{13}\sum_{\nu=6}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2\nu+1}=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{52}\cdot\frac{1}{3^{11}}<1.1\cdot 10^{-7}$.

19.20. Def.: Die binomische Reihe ist $(1+x)^\alpha \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in\,]-1,1[$,
diese Reihe ist abbrechend für $\alpha\in\mathbb{N}$ laut binomischen Satz in 2.19.
Bew.: • Sei OE $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $x\neq 0$, $a_n:=\binom{\alpha}{n}:=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ für $n\in\mathbb{N}_0$ (vgl. 2.17).
Dann ist $a_n>0$ und $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
• Ferner gilt: $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\liminf\sqrt[n]{a_n}\leq\limsup\sqrt[n]{a_n}\leq\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ü
Mit $|a_n|=\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\frac{1}{n!}|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|$ ist
$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\xrightarrow{n\to\infty}1$, mit 18.16. folgt somit für den Konvergenzradius $R=1$.
• Sei nun also $g:=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ für $|x|<1$.
Beh.: $(1+x)g'=\alpha g$.
⌈Bew.: $(1+x)g'=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^n$
$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+n\binom{\alpha}{n}\right)x^n$
$\overset{!}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha g$,
denn $\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+n\binom{\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)+n\cdot\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$
$=\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n+n)=\binom{\alpha}{n}\alpha$. □
• Sei nun $h:=\frac{g}{(1+x)^\alpha}$, $h'=\frac{(1+x)^\alpha g'-g\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}=(1+x)^{(\alpha-1)-\alpha}\left(\underbrace{(1+x)g'-g\alpha}_{=0}\right)=0$.
Also ist $h=c\in\mathbb{R}$ und $g(x)=c(1+x)^\alpha$, wo $c=g(0)=1$,
also ist $g(x)=(1+x)^\alpha$ ⇝ "$\overset{!}{=}$" ist bewiesen. □

19.21. Spezialfall der binomischen Reihe: $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+$ Terme höherer Ordnung,
als Anwendung erhält man zur Berechnung von $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{49}{49}\cdot\frac{100}{50}}=\frac{10}{7}\sqrt{1-\frac{2}{100}}$
den numerischen Wert $\sqrt{2}\approx\frac{10}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{100^2}\right)=\frac{10}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{100}-\frac{1/2}{10\,000}\right)$.

19.22. Bsp.: GW berechnung: $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln(1+t)\underset{\substack{\uparrow\\ 19.14(d)}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\left(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-+\dots\right)=\lim_{t\to 0}(1+\underbrace{\dots}_{\to 0})=1$.
schneller/besser ohne de l'Hospital!