Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An2: Die reellen Zahlen

Stichworte: Körperaxiome, Anordnung/positive Zahlen, Rechenregeln für Ungleichungen, Beträge, rekursive Definitionen, Σ/Π-Zeichen, $n!$, a^n, Bernoulli-Ungleichung, Binomialkoeffizienten, binomischer Satz

---

2.1. Motivation: Wir führen die reellen Zahlen axiomatisch ein. Die grundlegendsten Rechenregeln werden aus den Axiomen hergeleitet, speziell für Ungleichungen, die für die Analysis eine besondere Rolle spielen. Abkürzungen für besondere reelle Zahlen werden eingeführt, wie z.B. Summen/Produkte/Potenzen, Fakultäten und die Binomialkoeffizienten, für die der binomische Satz gilt. Vgl.: [Hoff], S. 33-38, §1.4.1 – 1.4.3.

2.2. Die Axiome der reellen Zahlen: Die Menge $\mathbb{R}$ ($\neq \emptyset$, ergibt sich aus den Axiomen) der reellen Zahlen wird definiert als diejenige Menge, die folgenden Eigenschaften/Axiomen genügt: Es gibt eine Teilmenge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ (der positiven reellen Zahlen), eine Abb. $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a+b$ (genannt Addition) und eine Abb. $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b =: ab$ (genannt Multiplikation), für die gilt:

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ Assoziativität $(\forall a,b,c\in\mathbb{R})$

(A2) $a+b = b+a$ Kommutativität $(\forall a,b\in\mathbb{R})$

(A3) $\exists 0\in\mathbb{R}: a+0=a$ Nullelement $(\forall a\in\mathbb{R})$

(A4) $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists -a\in\mathbb{R}: a+(-a)=0$ (additives) Inverses zu a

(M1) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ Assoziativität $(\forall a,b,c\in\mathbb{R})$

(M2) $a\cdot b = b\cdot a$ Kommutativität $(\forall a,b\in\mathbb{R})$

(M3) $\exists 1\in\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}: a\cdot 1 = a$ Einselement $(\forall a\in\mathbb{R})$

(M4) $\forall a\in\mathbb{R}^*\ \exists a^{-1}\in\mathbb{R}: a a^{-1} = 1$ (multiplikatives) Inverses zu a

Es gibt ein Axiom, das die "Verträglichkeit" von $+$ und $\cdot$ besagt:

(D) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ Distributivität $(\forall a,b,c\in\mathbb{R})$

Die Axiome (P1) - (P3) legen die Grundlage für das Rechnen mit positiven reellen Zahlen und die Anordnung "<" ("kleiner", vgl. 2.9):

(P1) $a = 0 \mathbin{\dot\vee} a \in \mathbb{P} \mathbin{\dot\vee} -a \in \mathbb{P}$, ⌐ $\dot\vee$ steht für entweder-oder ⌙

(P2) $a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a + b \in \mathbb{P}$,

(P3) $a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{P}$.

Das letzte Axiom (V) zeigt den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auf, vgl. 3.3 und 6.9.

(V) Vollständigkeit:
Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

2.3. Die Menge $\mathbb{R}$, zusammen mit + und den Axiomen (A1) - (A4) bildet eine abelsche (kommutative) Gruppe $(\mathbb{R}; +, (A1)\text{-}(A4))$, dabei gilt:

(1) Eindeutigkeit von 0: $(\exists!\, 0)$ $\quad 0'$ Nullelement $\Rightarrow 0 = 0'$ $\quad$ Bew.: $0 + 0' = 0$
$\underset{(A2)}{=} 0' + 0 = 0'$ ✓

(2) Eindeutigkeit von $-a$: Bew.: Sei b Inverses von a.
Haben $a + (-a) = 0 \Rightarrow b + (a + (-a)) = b + 0 = b$
$\overset{(A1)}{\Rightarrow} (a + b) + (-a) = b \Rightarrow 0 + (-a) = b \Rightarrow -a = b$. ✓

(3) Beh.: $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists!\, x \in \mathbb{R}: a + x = b$ (schreibe $b - a$ für dieses x).
Bew.: Ex.: $x = b + (-a)$ tut's: $a + b + (-a) \overset{(A2)}{=} a + (-a) + b = 0 + b = b$.
Eind.: $-a + \underbrace{a + x}_{= b} = -a + b \Rightarrow 0 + x = b + (-a) \Rightarrow x = b + (-a)$. □

Somit gilt: $b - a = -a + b = b + (-a)$, speziell: $0 - a = -a$, $-(-a) = a$, $-(a + b) = -a - b$

2.4. Def.: Eine Menge K mit den Axiomen $(K; +, \cdot; (A1)\text{-}(A4), (M1)\text{-}(M4), D)$ wie hier heißt ein (kommutativer) Körper.

2.5. Ebenso wie in (1)-(3) gilt auch für die Multiplikation: (1') 1 ist eindeutig
(2') a^{-1} ist eindeutig
(3') $\forall a \in \mathbb{R}^*\ \forall b \in \mathbb{R}\ \exists!\, x \in \mathbb{R}: ax = b$,
nämlich $x = b \cdot a^{-1}$.

Notation: $\frac{b}{a} := x = b \cdot a^{-1}$, speziell: $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

2.6. Bem.: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, Bew.: $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$. □

2.7. Eine Grundregeln zum Rechnen mit + und · :

(1) $a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^*$, Bew.: Sonst $a^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$, ↯ zu (M3). □

(2) Satz vom Nullprodukt: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Bew.: „$\Leftarrow$": 2.6, „$\Rightarrow$": Falls $a = 0$ ✓, falls $a \neq 0$: $\exists a^{-1}$: $\underbrace{\underbrace{a^{-1} a}_{} b}_{=b \text{ nach (M4)}} = 0 \Rightarrow b = 0$. □

(3) $(ab)^{-1} \overset{!}{=} b^{-1} a^{-1} \overset{(M2)}{=} a^{-1} b^{-1}$

Bew.: $(ab)(ab)^{-1} = 1 \Rightarrow \underbrace{(b^{-1} a^{-1}) \cdot (ab)}_{=1} (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} \Rightarrow \underbrace{b^{-1} b}_{=1} (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

$\Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} \overset{(M2)}{=} a^{-1} b^{-1}$. □

(4) $(-a) b = a(-b) = -(ab)$

Bew.: $ab + (-a) b \overset{(D)}{=} (a - a) b = 0 \cdot b \overset{2.6}{=} 0 \Rightarrow (-a) b = -(ab)$,

$ab + a(-b) \overset{(D)}{=} a(b - b) = a \cdot 0 \overset{2.6}{=} 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab)$. □

(5) $c(b-a) = cb - ca$, Bew.: $c(b-a) \overset{2.3(3)}{=} c(b + (-a)) \overset{(D)}{=} cb + c(-a) \overset{2.3(3)}{=} cb - ca$. □

2.8. Bem.: • $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine abelsche Gruppe weil $\nexists\, 0^{-1}$, aber: $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.
• $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ erfüllt (A1)-(A3), (M1)-(M3), D, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{P}$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ erfüllt zudem (P1)-(P3).

2.9. Def.: In (P1) nennen wir ein $a \in \mathbb{P}$ positiv und ein a mit $-a \in \mathbb{P}$ negativ.

Wir definieren $a < b$ (a kleiner als b)

bzw. $b > a$ (b größer als a) als die Aussage $b - a \in \mathbb{P}$.

Die Aussage $a \leq b$ (a kleiner oder gleich b) bzw. $b \geq a$ (b größer oder gleich a) wird definiert als $a < b \vee a = b$. Die Zeichen $<, \leq, >, \geq$ heißen Ungleichungszeichen.

2.10. Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln für Ungleichungen:

(1) $a = b \;\dot\vee\; a < b \;\dot\vee\; a > b$, Bew.: $a - b = 0$, $a - b \in \mathbb{P}$, $-(a-b) \in \mathbb{P}$ laut (P1). □

(2) $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$, Bew.: $b - a > 0$, $c - b > 0 \underset{(P2)}{\Rightarrow} c - b + b - a > 0 \Rightarrow c - a > 0$. □

(3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, Bew.: $b - a > 0 \Rightarrow (b + c) - (a + c) > 0$. □

(4) $a < b$, $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$, Bew.: $c(b-a) \overset{(P3)}{>} 0 \Rightarrow cb - ca > 0$. □

(5) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$, Bew.: „$\Rightarrow$" genügt wegen Symmetrie: $b - a > 0 \Rightarrow -a - (-b) > 0$. □

(6) $a < b$, $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$, Bew.: $c < 0 \Rightarrow -c > 0 \Rightarrow -ca < -cb \overset{(5)}{\Rightarrow} ca > cb \Rightarrow ac > bc$. □

(7) $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow ab > 0$, Bew.: $a < 0 \Rightarrow a \cdot b \overset{(6)}{>} 0 \cdot b = 0$. □

(8) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ (insb. $1 > 0$), Bew.: • $a > 0 \Rightarrow a \cdot a \overset{(4)}{>} a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$,

• $a < 0 \Rightarrow a \cdot a \overset{(6)}{>} a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$. □

(9) $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0 \quad (a \neq 0)$, **Bew.:** „$\Rightarrow$" genügt wegen $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$: $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \neq 0$ ✓
Also $\frac{1}{a} > 0$ (✓) oder $\frac{1}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a \overset{(4)}{<} 0 \cdot a \Rightarrow 1 < 0$, ↯ zu (8). □

(9') $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, **Bew.:** $ab > 0 \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{1}{ab} > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} 0 < a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab} \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. □

(10) $0 < b,\ a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$, **Bew.:** falls $a \leq 0$ ✓, also OE $a > 0$: Sonst $b \leq a \overset{(9')}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
$\Rightarrow \underbrace{a < \frac{b^2}{a}}_{\text{da } a^2 < b^2} \leq \frac{b^2}{b} = b \Rightarrow a < b$, ↯. □

(11) $a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$,
Bew.: $2 := 1 + 1 > 0 \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2a = a + a \overset{(3)}{<} a + b \overset{(3)}{<} b + b = 2b$
$\overset{(4)}{\Rightarrow} a < \frac{a+b}{2} < b \Rightarrow c := \frac{a+b}{2}$ erfüllt $a < c < b$. □

(12) $-a = a \Leftrightarrow a = 0$, **Bew.:** • $a = 0 \Rightarrow -a = 0 = a$ ✓, • $a = -a \overset{(P1)}{\Rightarrow} a = 0$. □

(13) $\forall c > 0 : a \leq b + c \Rightarrow a \leq b$, **Bew.:** Sonst $b < a \overset{(11)}{\Rightarrow} \exists t \in \mathbb{R} : b < t < a$. Sei $c := t - b > 0$.
$\Rightarrow t = b + c \geq a$, ↯. □

Def. der Potenz b^n s. 2.15 (4)

(14) Bernoulli-Ungleichung: $\forall a \in \mathbb{R}_{\geq -1}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : (1+a)^n \geq 1 + na$. (Für $n \geq 2$, $a \neq 0$, sogar $>$ statt $\geq$)
Bew. (durch vollst. Ind.): $n = 0$: $(1+a)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot a$ ✓, $n \rightsquigarrow n+1$: $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot \underbrace{(1+a)}_{\geq 0} \overset{\text{I.Vor.}}{\geq} (1+na) \cdot (1+a)$
$= 1 + a + na + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1) \cdot a$. □

2.11 **Def:** Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a (auch: Absolutbetrag von a),
Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $\max(x,y) := \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$ das Maximum von x und y,
und $\min(x,y) := \begin{cases} x, & x \leq y \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$ das Minimum von x und y.

2.12 **Bem.:** $|a| = |-a| = \max(a, -a)$.

2.13 Eigenschaften des Betrags $|\cdot|$:

(1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, **Bew.:** „$\Leftarrow$" ✓, „$\Rightarrow$": $|a| = \max(a, -a) = 0 \Rightarrow a = 0$. □

(2) $|a + b| \leq |a| + |b|$, **Bew.:** $a + b \leq |a| + |b| \wedge -(a+b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$. □

(3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, **Bew.:** OE $a \geq 0$, sonst $-a$ statt a: Symmetrie $\Rightarrow$ OE $b \geq 0$. Dann $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$. □

(4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$, **Bew.:** $|a| = \left|\frac{ab}{b}\right| \overset{(3)}{=} \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. □

(5) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \underset{(2)}{\leq} |a| + |b|$, **Bew.:** $|a| = |(a-b) + b| \overset{(2)}{\leq} |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$,
→ Symmetrie: $|b| - |a| = -(|a| - |b|) \leq |a - b| \Rightarrow \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$. □

(6) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$, **Bew.:** $a - c = (a - b) + (b - a) \overset{(2)}{\Rightarrow} |a - c| \leq |a - b| + |b - a|$. □

Bem.: Regel (2) heißt Dreiecksungleichung und wird häufig verwendet.
Regel (5) wird manchmal Dreiecksungleichung „nach unten" genannt und liefert eine „untere Abschätzung" für $|a - b|$, sowohl durch $|a| - |b|$ als auch durch $|b| - |a|$.

2.15. **Die rekursive Definition:** Geg. sei eine Zahlenfolge (reelle Folge, das ist eine Abb. $x: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wo $i \mapsto x_i$ geschrieben wird, haben also die Bilder $x_0, x_1, x_2, \ldots$
$i \in \mathbb{N}_0$ $x_i \in \mathbb{R}$

Wollen damit neue Zahlenfolgen definieren, z.B. $x_0, \ x_0 + x_1, \ (x_0+x_1)+x_2, \ (x_0+x_1+x_2)+x_3, \ldots$ ($+x_1$, $+x_2$, $+x_3$)
In rekursiven Definitionen wird die Def. eines z_{m+1} von vorherigen Folgengliedern $z_0, z_1, \ldots, z_m$ (und der Folge x) abhängig gemacht. Das ergibt z.B. das Summen- und Produktzeichen wie folgt.

(1) Das Summenzeichen: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_{\geq k}$ definiere $\underbrace{\sum_{i=k}^{m+1} x_i}_{z_{m+1}} := \underbrace{\sum_{i=k}^{m} x_i}_{z_m} + x_{m+1}$.

Man nennt $z_k := x_k$ den Startwert der neuen Folge $z_0, z_1, z_2, \ldots$

Somit: $z_m = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_m$, machen damit für diese Pünktchen klar, was gemeint ist

Spezialfälle: 1.) $m = k$, dann ist $\sum_{i=k}^{k} x_i := x_k$, 2.) $k > m$, dann ist $\sum_{i=k}^{m} x_i := 0$.

Die x_i heißen Summanden der Summe.

Bsp.: $\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$ "kleiner Gauß" (Beweis: s. 1.23), $\sum_{j=1}^{m} (2j-1) = m^2$

(2) Das Produktzeichen: Ebenso wird $\prod_{i=k}^{m} x_i$ definiert: Sei $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq k}$.
Definiere $\prod_{i=k}^{m+1} x_i := \left(\prod_{i=k}^{m} x_i\right) \cdot x_{m+1}$.
Somit: $\prod_{i=k}^{m} x_i = x_k \cdot x_{k+1} \cdot \ldots \cdot x_{m-1} \cdot x_m$
Die x_i heißen Faktoren des Produkts.

Spezialfälle: 1.) $m = k$, dann ist $\prod_{i=k}^{k} x_i := x_k$, 2.) $k > m$, dann ist $\prod_{i=k}^{m} x_i := 1$.

(3) Das Fakultätszeichen: Definiere $m! := \prod_{j=1}^{m} j$, Startwert: $0! := 1$.
Rekursiv also $(m+1)! = m! \cdot (m+1)$, $0! = 1$. Sprich: "m Fakultät" für $m!$
Somit: $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m$

(4) Definition der Potenz: Für $a \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ def.
$a^m := \prod_{j=1}^{m} x_j$ mit $x_j = a$ für alle $j \leq m$, und $a^0 := 1$, somit: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ mal}}$,
d.h. m Faktoren, alle $=a$
Für $a \neq 0$ sei $a^{-m} := \frac{1}{a^m}$.

(5) Der Binomialkoeffizient: Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$ erkläre rekursiv
$\binom{\alpha+1}{m+1} = \binom{\alpha}{m} + \binom{\alpha}{m+1}$ mit Startwerten $\binom{\alpha}{0} := 1$, $\binom{\alpha}{1} := \alpha$.

Einfacher ist die nicht-rekursive Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{m}$ wie folgt.

Binomialkoeffizienten und der binomische Satz

2.16. Sei $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Definiere $\binom{\alpha}{n}:=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ als Binomialkoeffizient.

2.17. Eigenschaften:

$\binom{\alpha}{0}=1$, $\binom{\alpha}{1}=\alpha$, für $\alpha=m\in\mathbb{N}_0$, $m<n$, ist $\binom{m}{n}=0$.

Für $m\geq n$ ist $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$,

denn $\binom{m}{n}=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(m-k+1)=\frac{(m-n+1)\cdot\ldots\cdot m\cdot(m-n)!}{n!\cdot(m-n)!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Es ist außerdem $\binom{m}{m}=1$. Weiter $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$, da $m-(m-n)=n$.

2.18. Bem.: Die Formel in 2.15(5) kann durch Einsetzen der Def. 2.16 und Erweitern hergeleitet werden. Schwieriger, aber auch möglich, ist die Herleitung der Def. 2.16 aus Formel 2.15(5). Man nennt diese die (Rekursions-)formel vom Pascalschen Dreieck.

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \leftarrow \binom{0}{0}=1\\
1 & 1 & & & \leftarrow \binom{1}{n}\\
1 & 2 & 1 & & \leftarrow \binom{2}{n}\\
1 & 3 & 3 & 1 & \leftarrow \binom{3}{n}\\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \quad \leftarrow \binom{4}{n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots
\end{array}
$$

2.19. Binomischer Satz: Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $n\geq 0$.

Dann gilt $(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j$.

l.S. = linke Seite
r.S. = rechte Seite

Bew. (ausführlich): durch vollst. Ind. nach n, $n=0$: $l.S.=(a+b)^0=1=\binom{0}{0}a^{0-0}b^0=r.S.$ ✓

$n\rightsquigarrow n+1$: Es gelte die Formel für ein $n\geq 0$, dann gilt sie auch für $n+1$ wegen

$$\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^{n+1-j}b^j=a^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\binom{n+1}{j}}_{=\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}}a^{n+1-j}b^j+b^{n+1}$$

nach 2.15(5), Indexsubst. in zweiter Σ: $k:=j-1$

$$=a^{n+1}+a\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j+b\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+b^{n+1}$$

$$=a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=(a+b)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j\underset{\text{Ind. Vor.}}{=}(a+b)\cdot(a+b)^n$$

$$=(a+b)^{n+1}. \quad \square$$

2.20. Bsp. für binom. Satz:

- $n=2$: $(a+b)^2=\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2=a^2+2ab+b^2$
- $n=4$: $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $a=b=1$: $2^n=(1+1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cdot 1^{n-j}\cdot 1^j=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.
- $a=1, b=-1$: $0=(1-1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}1^{n-j}\cdot(-1)^j=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$