Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An20: Uneigentliche Integrale

Stichworte: uneigentliches Integral, Integrierbarkeitskriterien, Integralkriterium für Reihenkonvergenz, Abschätzung der harmonischen Reihe

---

20.1. Einleitung: bisher wurden nur beschränkte Integranden zur Integration betrachtet. Wir wollen nun auch unbeschränkte Integranden und sogar unbeschränkte Integrationsintervalle zulassen. Man spricht dann von uneigentlichen Integralen; diese können existieren oder nicht. Bestimmte Konvergenzkriterien liefern die Existenz. [Hoff, §53]

20.2. Beispiele: a) Was ist $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$? Haben $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$, also $\sqrt{1-x^2} \notin \mathcal{L}([0,1])$.
Trotzdem gilt für $0<a<1$, dass $\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(a) \xrightarrow{a\to 1} \frac{\pi}{2}$, also $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$.
b) Was ist $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, wo $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}([0,\infty[)$ mit unbeschr. Integrations IV.
Es gilt $\int_0^T \frac{dx}{1+x^2} = \arctan T \xrightarrow{T\to\infty} \frac{\pi}{2}$, also $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$.
c) $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx \geq -\ln(\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} +\infty$, d.h. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ ex. nicht!
Erklären also: $\int_0^1 \dots = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \dots$ bzw. $\int_0^\infty \dots = \lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T \dots$, falls ex.

20.3. Def.: Sei $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a<b$, $f:[a,b[\to\mathbb{R}$, f sei int'bar auf jedem $[a,c]$ mit $a<c<b$. Ist dann f in $[a,b[$ unbeschränkt (oder $b=\infty$), so heißt
$\int_a^b f(t)dt$ ein (an der oberen Grenze) <u>uneigentliches Integral</u>.
- Falls $\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(t)dt$ existiert, so sagt man, <u>das uneigentliche Integral existiert</u> bzw. man nennt f im IV $[a,b]$ <u>(uneigentlich) integrierbar</u> und definiert dann $\int_a^b f(t)dt := \lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(t)dt$.
- Andernfalls sagt man, das uneigentliche Integral <u>divergiert</u>.
- Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn $\int_a^b |f(t)|dt$ existiert.
- Alles analog/entsprechend für Integrale, die an der unteren Grenze uneigentlich sind.

20.4. Bem.: Absolut konvergente uneigentliche Integrale sind konvergent, wir haben $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

20.5. **Bem.:** • Integrale können auch an beiden Grenzen uneigentlich sein, diese zerlegt man in zwei einseitig uneigentliche: wähle $a<c<b$ und def. $\int_a^b f(t)dt$ kgt. :$\Leftrightarrow$ $\int_a^c$ und $\int_c^b$ ex.,
dann $\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

• Integrale, die im Innern uneigentlich sind, werden ebenfalls in zwei einseitig uneigentliche zerlegt: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in allen IVen $[a,c[$, $]d,b]$ mit $a<c<x_0<d<b$ int'bar, so def. $\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{c\to x_0-} \int_a^c f(t)dt + \lim_{d\to x_0+} \int_d^b f(t)\,dt$, falls diese GWe ex.,
ansonsten heißt auch hier das $\int$ divergent.

20.6. **Bsp.:** 1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta}$ kgt. $\Leftrightarrow \beta > 1$ $\quad\ulcorner \int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-\beta}dx \underset{\beta\neq 1}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\beta-1}}}.\lrcorner$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ kgt. $\Leftrightarrow \alpha < 1$ $\quad\ulcorner$ Kritische Stelle: $x=0$; analog $\lrcorner$

3) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ kgt., nicht abs. kgt.

4) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

5) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

$\Big\}$ hier ohne Beweis, s. später in Vorlesung zur Funktionentheorie, Stichwort: "Gammafunktion"

20.7. **Rechenregeln für uneigentliche Integrale** (da diese GWe "normaler" Integrale sind):

1) Linearität: $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ (uneigentlich) int'bar, $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha f+g$ (uneig.) int'bar,
und $\int_a^b (\lambda f+g)(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

2) Hauptsatz: $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ in jedem $[a,c]$, $a<c<b$, int'bar,
F sei S.F. von f und $\lim_{x\to b-} F(x) =: F(b-)$ existiere. Dann ist f in $[a,b[$ int'bar
und $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b-} F(x) - F(a) = F(b-) - F(a)$.

3) Partielle Integration: Seien $u,v:[a,b[\to\mathbb{R}$ stetig diff'bar, $\lim_{x\to b-} u(x)v(x)$ ex.
Konvergiert $\int_a^b u(t)v'(t)dt$, so ist auch $u'v$ in $[a,b]$ int'bar, und es gilt
$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \lim_{x\to b-}(u(x)v(x) - u(a)v(a)) - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$.

4) Substitutionsregel: Sei $\varphi:[a,b[\to[\alpha,\beta[$ stetig diff'bar, streng isoton und bijektiv
(insb. $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\lim_{x\to b-}\varphi(x)$). Dann gilt $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$,
d.h. falls eines der beiden Integrale ex., dann auch das andere, und ihre Werte sind gleich.

Neben dem Konvergenzkriterium 20.4 gibt es noch weitere, die sich aus entsprechenden Kriterien für Grenzwerte ergeben, hier einige davon (in 20.8–20.10):

20.8. Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale: Sei $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a<b$, $f:[a,b[\to\mathbb{R}$, f int'bar in allen $[a,c[$, $a<c<b$. Dann ex. $\int_a^b f(t)dt$ genau dann, wenn $\forall\varepsilon>0\ \exists c\in[a,b[\ \forall x,y\in[c,b[: \left|\int_x^y f(t)dt\right|<\varepsilon$.

Bew.: Folgt mit $g(z):=\int_a^z f(t)dt$ sofort aus dem Cauchy-Kriterium 5.19/6.9 für GWe. □

20.9. Monotoniekriterium für uneigentliche Integrale: Sei $f:[a,b[\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ nichtnegativ ($a<b\leq\infty$), f int'bar in allen $[a,c]$, $a<c<b$. Dann ex. $\int_a^b f(t)dt$ genau dann, wenn die Integrale $\int_a^c f(t)dt$ für $a\leq c\leq b$ beschränkt sind. ⌜Die Kgz. ist absolut.⌟

20.10. Vergleichskriterien: Sei $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a<b$, $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$, f,g int'bar in allen $[a,c[$, $a<c<b$.

(a) Majorantenkriterium: Ist $|f(x)|\leq g(x)$ für alle $x\in[a,b[$ und ex. $\int_a^b g(t)dt$, dann ist $\int_a^b f(t)dt$ absolut konvergent.

(b) Minorantenkriterium: Ist $0\leq f(x)\leq g(x)$ für alle $x\in[a,b[$ und div. $\int_a^b f(t)dt$, dann ist $\int_a^b g(t)dt$ ebenfalls divergent.

Nützlich ist noch das

20.11. Integralkriterium für Reihenkonvergenz: Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine unendliche Reihe, $(a_n)\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$, und $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine antitone Funktion mit $a_n=f(n)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \text{ konvergent} \iff \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergent.}$$

Im Falle der Konvergenz gilt: $\sum_{n=2}^\infty f(n)\leq\int_1^\infty f(x)dx\leq\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Bew.: Da f antiton, gilt $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$ für $n\leq x\leq n+1$,

also $f(n+1)=\int_n^{n+1}f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq\int_n^{n+1}f(n)dx=f(n)$,

also $\sum_{n=1}^{N-1}f(n+1)\leq\int_1^N f(x)dx\leq\sum_{n=1}^{N-1}f(n)$, d.h. $\sum_{n=2}^N f(n)\underset{②}{\leq}\int_1^N f(x)dx\underset{①}{\leq}\sum_{n=1}^{N-1}f(n)$.

„⇒": Laut ① ist $\int_1^t f(x)dx$ beschr. Da $f\geq 0$ ist $\int_1^t f(x)dx$ isoton in t $\Rightarrow\int_1^\infty f(x)dx$ ex.

„⇐": Es sei $C:=\int_1^\infty f(x)dx$, mit ② folgt $\underbrace{\sum_{n=2}^N f(n)}_{\text{isoton in } \mathbb{N},\text{ da } f(n)\geq 0}\leq C \Rightarrow \sum_{n=2}^\infty f(n)$ ex. $\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty f(n)$ ex. □

20.12. Bsp.: (1) $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}$ ist div. für $\alpha\leq 1$ und kgt. für $\alpha>1$. ⌜20.11 mit $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ und Bsp. 20.6 (1), (2).⌟

(2) $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ ist div. für $\alpha\leq 1$ und kgt. für $\alpha>1$. ⌜20.11 mit $f(x)=\frac{1}{x\ln^\alpha(x)}$, Subst. $x(u)=e^u$⌟

(3) $\sum_{n=7}^\infty\frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^\alpha}$ ist div. für $\alpha\leq 1$ und kgt. für $\alpha>1$ usw.

20.12. **Bsp.:** Abschätzung der harmonischen Reihe: Für $N \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} = \ln(N) + R$, $\frac{1}{N} \le R \le 1$.

Bew.: Laut Bew. von 20.11. (①, ②) folgt mit $f(x) = \frac{1}{x}$, dass

$$\sum_{m=2}^{N} \frac{1}{m} \le \overbrace{\int_1^N \frac{1}{x}\,dx}^{=\ln N} \le \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m},$$ wo die l.S. $= \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - 1$, und die r.S. $= \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - \frac{1}{N}$.

Dies zeigt $\ln(N) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - R$ mit $\frac{1}{N} \le R \le 1$.

$\ulcorner -1 \le -R \le -\frac{1}{N} \lrcorner$ $\square$

Bem.: Der Grenzwert $\gamma := \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - \ln(N) \right)$ existiert und heißt Euler-Mascheroni-Konstante.

Es ist $\gamma = 0.5772\ldots$ Bis heute ist unbekannt, ob $\gamma \in \mathbb{Q}$ ist oder nicht.

Bew. der Ex.: Haben

$$\ln(N) = \sum_{m=1}^{N-1} \underbrace{\left(\ln(m+1) - \ln(m)\right)}_{= \ln \frac{m+1}{m}} = \sum_{m=1}^{N-1} \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \sum_{m=1}^{N-1} \left(\frac{1}{m} - R\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

$\uparrow$ $\ln(1+x) = x - R(x)$ mit $|R(x)| \le \frac{x^2}{2}$.

$\ulcorner$ Lagrange-Restglied 19.8 bei $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 1$, $a = 0$: $-R(x) = R_1(x;0) = f''(\xi) \cdot \frac{x^2}{2}$, $0 < \xi < 1$

$\rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\rightsquigarrow$ $f''(0) = -1$ $\rightsquigarrow |f''(\xi)| \le 1$

$\left(f''(1) = -\frac{1}{4}\right)$ $\lrcorner$

wo $\left|\sum_{m=1}^{N} R\left(\frac{1}{m}\right)\right| \le \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^2}$ kgt. für $N \to \infty$, also ex. $\lim_{N\to\infty} \left(\ln(N) - \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} - \frac{1}{N}\right) = -\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N-1} R\left(\frac{1}{m}\right)$. $\square$

Ende der Vorlesung Analysis I