Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 3: Rationale und irrationale Zahlen

Stichworte: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, Vollständigkeit/Archimedes-Eigenschaft, Wohlordnungssatz, Satz von der n-ten Wurzel, geometrische Summe, Dezimalbruchdarstellung

[Hoff] §1.6–1.8

3.1. Einleitung: Wir definieren die reellen Zahlen und die Begriffe im Vollständigkeitsaxiom (V). Die Archimedes-Eigenschaft folgt aus (V), und liefert etwa den Wohlordnungssatz. Demnach liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, und wir können die n-te Wurzel einer Zahl definieren. Weiter kann man reelle Zahlen als Dezimalbruch darstellen; zum Beweis wird die Formel von der geometrischen Summe benötigt.

3.2. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$: Sei $\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R};\ \exists p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}_{(\neq 0)} : x = \frac{p}{q}\}$.

Für $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt: $a \pm b \in \mathbb{Q}$, $-a \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Q}^\times \Rightarrow \hat{a} \in \mathbb{Q}$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{P} \cap \mathbb{Q})$ erfüllt (A1)–(A4), (M1)–(M4), (D), (P1)–(P3),

und bildet demnach einen angeordneten (kommutativen) Körper.

3.3. Aber: (V) gilt nicht! Denn: $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$.

Bew.: Sonst sei $x > 0$, $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q > 0$ teilerfremd so, dass $x^2 = 2$.

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p$, d.h. $\exists m \in \mathbb{N} : p = 2m$.

$\Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q$, ↯ gegen Teilerfremdheit von p, q. □

Inwiefern widerspricht dies (V)? Hatten das

Vollständigkeitsaxiom (V): Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine $\underbrace{\text{kleinste obere Schranke}}$ (in $\mathbb{R}$).

Definieren die Begriffe aus (V) wie folgt. ← Supremum, vgl. Def. 3.5

3.4. Def.: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R} \ni a$.

- a heißt obere Schranke (o.S.) von M, falls $\forall m \in M : m \leq a$. (Notiere $M \leq a$, $a \geq M$.)
- M heißt nach oben (n.o.) beschränkt $\iff \exists$ o.S. von M

Analog: untere Schranke (u.S.), nach unten (n.u.) beschränkt.

- M heißt beschränkt $\iff M$ ist n.o. und n.u. beschränkt

3.5 **Def.:** Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R} \ni s$.

- s heißt Kleinste o.S. von M, falls $s \geq M$ und $\forall t \in \mathbb{R}$, t ist o.S. von M: $s \leq t$.
  (D.h. jede o.S. von M ist mindestens so groß wie s.)
- Ist s Kleinste o.S., so heißt s Supremum von M, schreibe $s = \sup(M)$.
  Falls $s = \sup(M)$ und $s \in M$, heißt s auch Maximum von M, schreibe $s = \max(M)$.

Bem.: • Ein Supremum ist also das Minimum aller oberer Schranken.
• M endlich $\Rightarrow \max(M) = \sup(M)$. • Bsp.: $\sup\{x \in \mathbb{R};\ x < 1\} = 1$.

Analog: größte u.S. = Infimum von M, schreibe $\inf(M)$, $\inf(M) \in M \Rightarrow \inf(M) = \min(M)$: Minimum

3.6 **Bem.:** In 3.3 hat die n.o. beschränkte Menge $M = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\} \neq \emptyset$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$:
Beispielsweise kann die absteigende Folge $1.5 > 1.42 > 1.415 > 1.4143 > 1.41422 > \ldots$
rationaler oberer Schranken von M beliebig weit fortgesetzt werden, sie hat kein Minimum in $\mathbb{Q}$;
wohl aber in $\mathbb{R}$, wir nennen diese Zahl $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vgl. 3.14.
Studieren nun Folgerungen des Vollständigkeitsaxioms in $\mathbb{R}$.

3.7 **Archimedes-Eigenschaft (A):** $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt,
d.h. $\neg(\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \leq a) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: n > a$.

Bew.: Sonst folgt mit (V): $\exists s = \sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$, denn $\mathbb{N} \neq \emptyset$.
$\Rightarrow s - 1$ ist keine o.S. $\Rightarrow \exists n^* \in \mathbb{N}: s - 1 < n^* \Rightarrow s < n^* + 1 \in \mathbb{N}$, $\lightning$. $\square$

3.8 **Folgerung (1):** $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b > 0: \exists n \in \mathbb{N}: nb > a$.
Bew.: $(A) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n > \frac{a}{b} \Rightarrow nb > a$. $\square$

3.9 **Folgerung (2):** $\forall b > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{n} < b$.
Bew.: Folgerung $(1) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: nb > 1 \Rightarrow b > \frac{1}{n}$. $\square$

3.10 **Folgerung (3):** $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! n \in \mathbb{Z}: n \leq x < n+1$. Schreiben $[x] := n$
und nennen n die Gaußklammer von x. Bsp.: $[-3.14] = -4$, $[2.1] = 2$.

Bew.: • Eindeutigkeit von n: Sei $m \leq x < m+1$, OE $n < m \Rightarrow n+1 \leq m \leq x < n+1 \Rightarrow n < n$ $\lightning$.
• Existenz von n: a) $x \geq 0$: $(A) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: m > x \Rightarrow \emptyset \neq \{k \in \mathbb{N};\ x < k\} = M$.
Sei p kleinstes El. von M laut Wohlordnungssatz 3.11.
$\Rightarrow n := p - 1 \leq x < p = n + 1$.

b) $x < 0$: $(A) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: x + k \geq 0$, finde n wie in a) für $x + k$
$\Rightarrow n \leq x + k < n + 1 \Rightarrow n - k \leq x \leq n - k + 1 \Rightarrow n - k$ tut's. $\square$

3.11. Wohlordnungssatz: Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}_0$ besitzt ein minimales Element (in M).
Bew.: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$, sei $U := \{m \in \mathbb{N}_0 ; m \leq M\} \ni 0$.
Beh.: $\exists m_0 \in U : m_0 + 1 \notin U$, denn sonst folgte induktiv $U = \mathbb{N}_0$, mit (A) also $M = \emptyset$, ↯.
Also folgt $m_0 \leq M$, $m_0 + 1 \nleq M$, d.h. $m_0 \in M$ $\Rightarrow$ m_0 ist minimal in M. □

3.12. Folgerung (I): $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$ (d.h. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$).
Bew.: Folgerung (2) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} \leq b - a$. Sei $m := \min\{k \in \mathbb{Z} ; k > na\}$.
$\Rightarrow m - 1 \leq na \Rightarrow a < r := \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$. □

3.13. Folgerung (II): Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen "approximieren",
d.h. $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{Q} : |a - r| < \varepsilon$.
Bew.: Folgerung (I) auf $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ angewandt zeigt:
$\exists r \in \mathbb{Q} : a - \varepsilon < r < a + \varepsilon \iff a - r < \varepsilon \wedge \underbrace{r - a}_{= -(a-r)} < \varepsilon \iff |a - r| < \varepsilon$. □

3.14. Satz von der n-ten Wurzel: $\forall a > 0\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\ \exists!\, b > 0 : b^n = a$.
(Nennen $b > 0$ die n-te Wurzel aus a, Notation: $\sqrt[n]{a} := b$ oder $a^{\frac{1}{n}} := b$.)

"OE" heißt "ohne Einschränkung"

Bew.: OE sei $n \geq 2$. Eindeutigkeit: Seien $0 < b_1 < b_2$ Lösungen $\Rightarrow a = b_1^n < b_2^n = a$, ↯.
Induktiv: $n = 1 \checkmark$, $b_1^{n+1} = b_1 \cdot b_1^n < b_2 \cdot b_1^n < b_2 \cdot b_2^n = b_2^{n+1}$ ✓

Existenz: Sei $A := \{x \in \mathbb{R} ; x^n < a\} \ni 0$. Dann ist A n.o. beschränkt,
denn $\exists k \in \mathbb{N} : a < k \leq k^n$ (d.h. k ist o.S. von A), sei $b := \sup A \geq 0$ nach (V),
sogar $b > 0$.
Beh.: $b^n = a$
Sonst 1. Fall: $b^n < a$, dann $\exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \frac{a - b^n}{an} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{b^n}{a}\right) < 1 \Rightarrow n\varepsilon < 1 - \frac{b^n}{a}$
$\Rightarrow \frac{b^n}{a} < 1 - n\varepsilon < (1-\varepsilon)^n \Rightarrow \left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^n < a \Rightarrow \underbrace{\frac{b}{1-\varepsilon}}_{> b} \in A$, ↯ gegen $b = \sup A$.
2. Fall: $a < b^n$, dann $\exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \frac{b^n - a}{b^n n} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{b^n}\right) < 1 \Rightarrow \frac{a}{b^n} < 1 - n\varepsilon < (1-\varepsilon)^n$
$\Rightarrow a < (\underbrace{b(1-\varepsilon)}_{< b})^n < b^n$, ↯ gegen $b = \sup A$.

Bem.: Für $r = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ def. $a^r := (a^{1/n})^k = (\sqrt[n]{a})^k$ für $a > 0$. □

Als Vorbereitung für die Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen benötigen wir die

3.15 Formel von der geometrischen Summe: $\forall q \in \mathbb{R}_{\neq 1}, \forall m \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^{m} q^j = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$.
Bew.: $(q-1)\sum_{j=0}^{m} q^j = \sum_{j=0}^{m} q^{j+1} - \sum_{j=0}^{m} q^j = q^{m+1} - 1$. □

Bsp.: $\frac{10^4 - 1}{10 - 1} = \frac{9\,999}{9} = 1\,111 = 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3$, $\quad 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023$.

3.16 Folgerung: $0<q<1, n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} q^j < \frac{1}{1-q}$ ✓

3.17 Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen (Basis $B=10$, jedes $B\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ möglich): ↳ "B-adische Darstellung"

Gegeben sei $k\in\mathbb{N}$ und $a_j\in\{0,1,\dots,9\}$ für alle $j\geq -k$.

• Setze $S := \{ s_n := \sum_{j=-k}^{n} a_j 10^{-j}, n\in\mathbb{N}_{\geq k}\}$.

Dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}$: $s_n \leq 9\cdot\sum_{j=-k}^{n} 10^{-j} = 9\cdot 10^k\cdot\sum_{j=0}^{n+k} 10^{-j} \overset{\text{geom.}\Sigma}{=} 9\cdot 10^k\cdot\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+k-1}-1}{\frac{1}{10}-1}$

$\underset{\text{Folgerung 3.16}}{<} 9\cdot 10^k\cdot\frac{1}{0.9} = 10^{k+1} \Rightarrow S\leq 10^{k+1}$.

↳ S ist n.o. beschr.

• Sei $s := \sup S = \sup(\{s_n\})$

(Schreibweise: $s = \sum_{j=-k}^{\infty} a_j 10^{-j}$ ← nur symbolisch ⇝ die Existenz dieser reellen Zahl ist mit (V) somit gesichert!)

Dann gilt sicher $s_n \leq s_{n+1} \leq s$.

Für $m>n$ ist $s_m \leq s_n + 10^{-n}$, denn $s_m - s_n = \sum_{j=n+1}^{m} a_j 10^{-j} \leq 10^{-n}$, folgt mit 9-Abschätzung wie in ⊛

$\Rightarrow s\leq s_n + 10^{-n}$,

also wird s durch die s_n approximiert.

Schreibweise: $a_k\ a_{k-1}\ a_{k-2}\ \dots\ a_1\ a_0\ .\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \dots\ a_{-n}\ a_{-n-1}\ \dots$
(Dezimalbruch) Dezimalpunkt (lesen "Komma" auf Deutsch)

3.18. Behandle nun das Problem: Finde k, a_j zu $0\leq x\in\mathbb{R}$, d.h. finde zu x die Dezimaldarstellung s wie in 3.17 so, dass $x=s$ ist.

3.19. Hilfssatz: a) Sei $q\in\mathbb{R}_{>1}$. Dann: $\forall k>0\ \exists n\in\mathbb{N}: q^n>k$.

b) $\forall 0<q<1\ \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}: q^n<\varepsilon$.

Bew.: zu a): $q^n = (1+(q-1))^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+n(q-1)$. Nun $\exists n: n(q-1)>k-1$.

$\Rightarrow q^n>k$.

Zu b): $\left(\frac{1}{q}\right)^n \underset{a)}{>} \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow q^n<\varepsilon$. □

3.20. Konstruktion zur Lösung von Problem 3.18:
Sei $k := \min\{m \in \mathbb{N};\ x < 10^{m+1}\}$, die a_{-j} werden rekursiv definiert durch $x_m := \sum_{j=-k}^{m} a_{-j}\,10^{-j}$ mit $\boxed{x_m \le x < x_m + 10^{-m}}$:

$m = -k$: $a_k := \max\{b \in \mathbb{N};\ b \cdot 10^k \le x\}$ ($\Rightarrow 0 \le b \le 9$ wegen k)
$\Rightarrow x_{-k} = a_k \cdot 10^k \le x < (a_k + 1)\cdot 10^k = x_{-k} + 10^k$.
$m \rightsquigarrow m+1$: $a_{-(m+1)} := \max\{b \in \mathbb{N};\ x_m + b\cdot 10^{-(m+1)} \le x\}$ ($\Rightarrow 0 \le b \le 9$ wegen Kasten oben)
$\Rightarrow x_{m+1} = x_m + a_{-(m+1)} \cdot 10^{-(m+1)} \le x < x_m + (a_{-(m+1)} + 1)\cdot 10^{-(m+1)} = x_{m+1} + 10^{-(m+1)}$.

Zeige: $x \overset{!}{=} \sup\{x_m;\ m \in \mathbb{Z}_{\ge -k}\} =: s$, d.h. die Konstruktion tut's.
Bew.: Aus $x_m \le x < x_m + 10^{-m}$ folgt $s \le x$.
Mit dem Hilfssatz b) folgt: $\forall c > 0\ \exists m \in \mathbb{N}:\ 10^{-m} < c$.
Dies bedeutet $x < x_m + 10^{-m} \le s + 10^{-m} \le s + c$
$\Rightarrow x \le s + c \Rightarrow x \le s$.
laut 2.10.(13)
Aus $s \le x \le s$ folgt $x = s$. □

3.21. Bem.: Laut 3.20. existiert eine Dezimalbruchdarstellung für $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (wo $x^2 = 2$):
1.) Da $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$, beginnt die Dezimaldarst. von $\sqrt{2}$ mit 1.
2.) Da $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$, " mit 1.4...
3.) Da $1.41^2 = 1.9881 < 2 < 2.0164 = 1.42^2$, " mit 1.41... usw.

3.22. Bem.: Die Darstellung reeller Zahlen mit Dezimalbrüchen ist nicht eindeutig, da z.B. $0.9999\ldots = 1.000\ldots = 1$ ist, vgl. 7.21.

3.23. Beweis des Wohlordnungssatzes 3.11 ausführlich aufgeschrieben:
Bew.: Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, und sei $U := \{m \in \mathbb{N}_0;\ m \le M\}$ die Menge der unteren Schranken von M in $\mathbb{N}_0$, sicher ist $0 \in U$, also $U \ne \emptyset$.
[Beh.: $\exists m_0 \in U:\ m_0 + 1 \notin U$, denn sonst folgte induktiv $U = \mathbb{N}_0$ ⌈mit $0 \in U$ und $m_0 \in U \Rightarrow m_0 + 1 \in U$⌋.
Wegen (A) ist $\mathbb{N}_0$ nicht nach oben beschränkt, wohl aber U durch M laut Def. von U, falls $M \ne \emptyset$. ↯]
Also folgt $m_0 \le M$, $m_0 + 1 \not\le M$, d.h. $m_0 \in M$. ⌈d.h. $\forall m \in M: m_0 \le m$ und $\exists \tilde{m}_0 \in M: \tilde{m}_0 < m_0 + 1$, also $m_0 \le \tilde{m}_0 < m_0 + 1 \Rightarrow m_0 = \tilde{m}_0 \in M$.⌋
Somit gilt: $m_0 \in M$ ist minimal in M. □