Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 4: Komplexe Zahlen

Stichworte: Konstruktion, imaginäre Einheit, Rechenregeln, komplex Konjugiertes, Betrag, beschränkte Menge, komplexe Ebene, Real- und Imaginärteile

---

4.1. Einleitung: Wir führen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Paare reeller Zahlen ein. Mit der richtigen Definition für + und · ist $\mathbb{C}$ ein (kommutativer) Körper, in dem die Gleichung $x^2=-1$ zwei Lösungen hat. Wir erweitern so den Körper der reellen Zahlen. Die wichtigsten Rechenregeln für $\mathbb{C}$ werden notiert. [Hoff, §1.9]

4.2. Def.: Sei $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit der Addition $(x,y)+(u,v) := (x+u, y+v)$ und der Multiplikation $(x,y)\cdot(u,v) := (xu-yv, xv+yu)$.

4.3. Bem.: Offensichtlich sind $(0,0)$, $(1,0)$ die neutralen Elemente bzgl. $+, \cdot$.

4.4. Satz: $\mathbb{C}$ ist ein (kommutativer) Körper, jedes $(a,b)\neq(0,0)$ hat das multiplikative Inverse $(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b)$.

Bew.: Körperaxiome nachrechenbar, Inverses prüfen: $(a,b)\cdot\frac{1}{a^2+b^2}(a,-b) = \frac{1}{a^2+b^2}(a^2-b\cdot(-b), a\cdot(-b)+ba)$
$= \frac{1}{a^2+b^2}(a^2+b^2, 0) = (1,0)$ ✓

4.5. Def.: Wir nennen $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen.

4.6. Bem.: Die Abbildung $\omega: \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ r\mapsto(r,0)$ ist injektiv.
Außerdem gilt $\omega(a \overset{+}{\cdot} b) = \omega(a) \overset{+}{\cdot} \omega(b)$.
Wir fassen $\mathbb{R}$ somit als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf. (z.B. ist $1 := (1,0)$ etc.)

4.7. Def.: Wir bezeichnen die komplexe Zahl $i := (0,1)$ als imaginäre Einheit.

4.8. Bem.: Für i gilt $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$.
Damit lässt sich (a,b) schreiben als
$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a\cdot(1,0)+b\cdot(0,1) = a\cdot 1 + b\cdot i = a+bi.$$

4.9. Def.: Wir nennen $\operatorname{Re}((a,b)) = \operatorname{Re}(a+bi) := a$ den Realteil
und $\operatorname{Im}((a,b)) = \operatorname{Im}(a+bi) := b$ den Imaginärteil von $a+bi$.

Bsp.: $\operatorname{Re}(i)=0$, $\operatorname{Im}(i)=1$, $\operatorname{Re}(2-3i)=2$, $\operatorname{Im}(2-3i)=-3$.

4.10 **Def.:** Sei $z \in \mathbb{C}$, z.B. $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann heißt $\overline{z} := a - bi$ das zu z Konjugiert Komplexe.
Der Betrag von z ist definiert als $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
(Für $z \in \mathbb{R}$ gilt dann $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$.)

4.11 Rechenregeln für das Rechnen in $\mathbb{C}$:

(1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, (2) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

(3) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, (4) $\overline{\overline{z}} = z$,

(5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ (6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(7) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = z$

(8) $\forall z \neq 0: \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ ← Formel zum Invertieren Komplexer Zahlen $\neq 0$

(9) $\forall z \neq 0: (\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$

Bew.: (1): $\operatorname{Re}(a+ib) = a = \frac{1}{2}(a+ib+a-ib)$, (2): $\operatorname{Im}(a+ib) = b = \frac{1}{2i}(a+ib-(a-ib))$,

(3): $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$, (4): $\overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib$,

(5): $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{a_1 + ib_1 \pm (a_2 + ib_2)} = a_1 - ib_1 \pm a_2 \mp ib_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

(6): $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)$

und $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 + (-1)^2 b_1 b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$ " ✓

(7): $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zeigt, dass $z = a + ib \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$,

(8): $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} \underset{(3)}{=} 1 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, (9): $1 = \overline{1} = \overline{z z^{-1}} \underset{(6)}{=} \overline{z} \cdot \overline{z^{-1}} \Rightarrow (\overline{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$. $\square$

4.12 Rechenregeln für den Betrag in $\mathbb{C}$:

(1) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung

(3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(5) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Dreiecksungleichung "nach unten"

(6) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$

<u>Bew.:</u> (1): $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$, $\quad |z| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(3): $|z_1 \cdot z_2|^2 \overset{4.11(3)}{=} z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} \overset{4.11(6)}{=} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2 \overset{4.11(3)}{=} |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

(2): $\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$\overset{(1)}{\leadsto} \quad |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

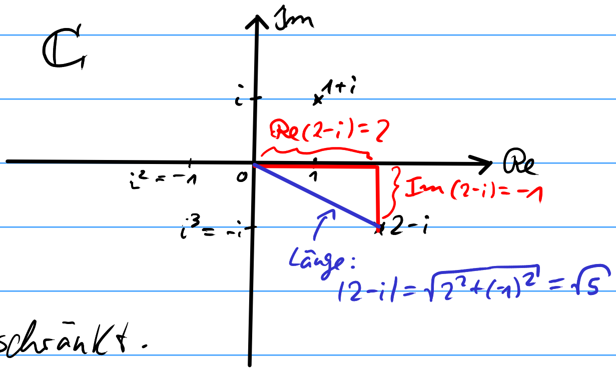
also $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(4): $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \underset{4.11.(8)}{=} \left|z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right| \underset{(3)}{=} \frac{1}{|z_2|^2} \cdot |z_1| \cdot \underbrace{|\bar{z}_2|}_{=|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(5), (6): Genau wie in 2.13 (5), (6). $\square$

4.13. <u>Def.:</u> $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>beschränkt</u>, falls $\exists N > 0 \ \forall z \in M: |z| \leq N$.
(Dieser Begriff stimmt im Spezialfall $M \subseteq \mathbb{R}$ mit früherer Def. 3.4 überein.)

4.14. <u>Anschauung</u>: <u>Komplexe Ebene</u>:



Bsp.: Die Einheitskreisscheibe
$\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ ist beschränkt.

4.15. <u>Bem.:</u> $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper in dem Sinne, dass es eine Relation "$\leq$" gäbe, die mit den Körperaxiomen verträglich wäre.

<u>Begründung ausführlich aufgeschrieben:</u> Angenommen, es gäbe eine Relation "$\leq$" in $\mathbb{C}$, also eine Teilmenge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{C}$ so, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{P})$ einen angeordneten Körper bildet.

Dann gelten die in 2.10 formulierten Rechenregeln. Haben $i \neq 0$, also ist $i > 0$ oder $i < 0$ (P1).

• <u>Falls</u> $i > 0$, gilt $i > 0 \underset{1 \cdot i > 0}{\Rightarrow} -1 \underset{\text{Def.}\, i}{=} i^2 > 0 \cdot i \underset{\text{s.v. Nullpr.}}{=} 0$ unter Verwendung von 2.10.(4), also ist $-1 > 0$ ↯.

• <u>Falls</u> $i < 0$, gilt $i < 0 \underset{1 \cdot i < 0}{\Rightarrow} -1 = i^2 > 0 \cdot i = 0$ unter Verwendung von 2.10(6), also ist $-1 > 0$ ↯.

Der Widerspruch $-1 > 0$ zeigt, dass die Annahme nicht gelten kann. $\square$