Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu

K. Halupczok

An 5: Folgen

Stichworte: Folgen, beschränkte Folgen, Nullfolgen, Konvergenz/Divergenz, Monotonie, Cauchy-Folgen, Grenzwertsätze/Sandwichlemma

---

5.1. Einleitung: Wir behandeln reell- oder komplexwertige Folgen. Über beschränkte Folgen und Nullfolgen gelangen wir zum Konvergenzbegriff. [Hoff, §3.1.1-3]

5.2. Def.: Sei $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$, und $\mathcal{F}:=\mathcal{F}(\mathbb{N},K)=\{a:\mathbb{N}\to K\}$ die Menge aller K-wertigen Folgen. (auch $\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_{\geq c}, \ldots$ möglich)

5.3. Notationen: Sei $a\in\mathcal{F}$. Dann schreiben wir auch a_n statt $a(n)$, (a_n) statt a.

5.4. Def.: Seien $a,b\in\mathcal{F}$. Dann def. $(a\pm b)_n := a(n)\pm b(n) = a_n \pm b_n$

Sei $a\in\mathcal{F}$, $\alpha\in K$. Dann def. $(\alpha a)_n := \alpha\cdot(a(n)) = \alpha a_n$

Der Betrag einer Folge sei $|a|(n) := |a(n)| = |a_n|$

Für $K=\mathbb{R}$ ist $a\leq b \;:\Leftrightarrow\; \forall n\in\mathbb{N}: a(n)\leq b(n)$.

5.5. Bem.: $\mathcal{F}$ ist ein K-Vektorraum.

5.6. Def.: Falls $b(n)\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist, dann def. $\left(\frac{1}{b}\right)(n) := \frac{1}{b(n)} = \frac{1}{b_n}$

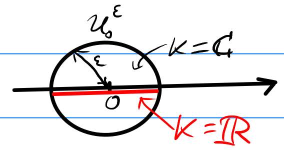
$\Rightarrow \frac{a}{b} := a\cdot\frac{1}{b}$

5.7. Bsp.: $\alpha\in K$, sei $a_n := \alpha$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann heißt a konstante Folge.

5.8. Def.: $a\in\mathcal{F}$ heißt Nullfolge $:\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0\;\exists\, n_0=n_0(\varepsilon)\;\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0: |a_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0\;\exists\, n_0\;\forall n\geq n_0: a_n\in U_0^\varepsilon$

5.9. Erläuterung: $U_0^\varepsilon := \{z\in K;\ |z|<\varepsilon\}$ nennen wir ε-Umgebung von 0.



5.10. Def.: $a\in\mathcal{F}$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow a(\mathbb{N})$ beschränkt in K

$\Leftrightarrow \exists\, M>0\;\forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\leq M$.

5.11. Notation: $\mathfrak{N} := \{\text{Nullfolgen}\}$, $\mathfrak{B} := \{\text{beschränkte Folgen}\}$.

5.12 Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{B}$, Bew.: $a \in \mathfrak{N} \Rightarrow \exists n_0 = n_0(1): |a_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1\}$.

Dann folgt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a \in \mathcal{B}$. $\square$

(2) $\mathcal{B}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{F}$.

Bew.: $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \Rightarrow (a_n) + (b_n) \in \mathcal{B}$,

$|\alpha a_n| = |\alpha| \cdot |a_n| \Rightarrow \alpha(a_n) \in \mathcal{B}$. $\square$

(3) $\mathfrak{N} \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathfrak{N}$.

Bew.: $a \in \mathfrak{N}$, $b \in \mathcal{B} \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M} \leq |a_n| \cdot M$.

Aus $a \in \mathfrak{N}$ folgt:

$\exists n_0(\frac{\varepsilon}{M})\ \forall n \geq n_0: |a_n b_n| \leq |a_n| \cdot M \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n b_n) \in \mathfrak{N}$. $\square$

(4) $\mathfrak{N}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{F}$.

Bew.: • Seien $a, b \in \mathfrak{N}$. $\exists n_0(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall n \geq n_0: |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

und $\exists n_1(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall n \geq n_1: |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Dann: $\forall n \geq n_2: |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Also ist $(a_n) + (b_n) \in \mathfrak{N}$.

• Weiter (OE $\alpha \neq 0$): $\exists n_0(\frac{\varepsilon}{|\alpha|})\ \forall n \geq n_0: |\alpha a_n| = |\alpha| \cdot |a_n| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$.

Also ist $\alpha(a_n) \in \mathfrak{N}$. $\square$

(5) $\forall a \in \mathfrak{N}\ \forall f \in \mathcal{F}$ mit $|f| \leq |a|$ folgt $f \in \mathfrak{N}$. ✓

5.13 Beispiele: 1. $(\frac{1}{n}) \in \mathfrak{N}$, denn $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

2. Sei $q \in K$, $|q| < 1$, $|q^n| = |q|^n$. Dann ist $a \in \mathfrak{N}$ für $a_n := q^n$.

Bew.: $\exists n_0: |q|^{n_0} < \varepsilon$ (wegen Hilfssatz 3.19 b)).

Dann folgt für $n \geq n_0$, dass $|q|^n \leq |q|^{n_0} \cdot 1^{n-n_0} = |q|^{n_0} < \varepsilon$. $\square$

3. $(100 \cdot \frac{i^n}{n^2}) \in \mathfrak{N}$, denn $(100) \in \mathcal{B}$,

und $\frac{i^n}{n^2} \in \mathfrak{N}$ da $|\frac{i^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n} \in \mathfrak{N}$ wegen (5),

unter Verwendung von (3).

Sei $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$, sowie $(a_n)\in\mathfrak{F}$, $\alpha\in K$.

5.14. **Def.:** $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \iff a_n \to \alpha \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$
$:\iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0: |a_n-\alpha|<\varepsilon.$

In Worten: (a_n) konvergiert gegen α, auch: strebt gegen α.
$\alpha\in K$ heißt Grenzwert (kurz: GW) der Folge (a_n).

5.15. **Umformulierung:**
$a_n\to\alpha \iff a_n-\alpha\in\mathfrak{N} \iff$ jede ε-Umgebung $\mathcal{U}_\alpha^\varepsilon$ von α enthält fast alle a_n (d.h. alle bis auf endlich viele).
Dabei ist $\mathcal{U}_\alpha^\varepsilon := \{z\in K;\ |z-\alpha|<\varepsilon\}$.

5.16. **Bezeichnung:** a konvergent (kgt.) $\iff \exists \alpha\in K: a_n\to\alpha$,
ansonsten: a divergent (div.)

5.17. **Def.:** Sei $K=\mathbb{R}$. Dann heißt a nach oben beschränkt (n.o. beschr.), genau dann wenn $a(\mathbb{N})$ nach oben beschränkt ist.
- (a_n) heißt isoton (monoton nicht fallend), falls $\forall n: a(n+1)\geq a(n)$.
- (a_n) heißt antiton (monoton nicht wachsend), falls $\forall n: a(n+1)\leq a(n)$.
- (a_n) heißt monoton $:\iff (a_n)$ ist isoton oder antiton.

5.18. **Eigenschaften:**
(1) $a_n\to\alpha,\ a_n\to\alpha' \Rightarrow \alpha=\alpha'$ (Eindeutigkeit des Grenzwertes!)
Bew.: $\alpha-\alpha' = (a_n-\alpha')-(a_n-\alpha)\in\mathfrak{N} \Rightarrow \alpha=\alpha'$. $\square$

(2) 1.) $\mathcal{K} := \{$Konvergente Folgen$\}$ ist Untervektorraum von $\mathfrak{F}$.
2.) $L: \mathcal{K}\ni a \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in K$ ist K-lineare Abb.
Bew.:
- $a_n\to\alpha,\ b_n\to\beta \Rightarrow (a_n-\alpha)+(b_n-\beta)\to 0 \iff (a_n+b_n)\to(\alpha+\beta)$.
- $\gamma\in K$: $\gamma a_n-\gamma\alpha = \gamma(a_n-\alpha)\in\mathfrak{N} \iff \gamma a_n\to\gamma\alpha$. $\square$

5.19. **Def.:** $\mathfrak{F}\ni a$ heißt Cauchyfolge (CF)
$:\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n,m\in\mathbb{N}_{\geq n_0}: |a_n-a_m|<\varepsilon.$
Sei $\mathcal{C} := \{CF\}$.

5.20. **Bsp.:** Konstante Folge $\in\mathcal{C}$.

Bem.: Diese Def. kommt ohne der Nennung eines "GWes" $\alpha\in K$ aus.

5.21. **Satz:** $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

Bew.: • Sei $a \in \mathcal{K}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha := \lim a_n$, d.h. $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ mit $m, n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

$\Rightarrow a \in \mathcal{C}$.

• Sei $b \in \mathcal{C}$, $\varepsilon = 1$, dann $\exists n_0(1)$: $|a_n - a_m| < 1$ für alle $m, n \geq n_0(1)$.

$\Rightarrow \big|\, |a_n| - |a_{n_0}| \,\big| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n| \leq |a_{n_0}| + 1$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $M := \max\{|a_{n_0}| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq M \Rightarrow b \in \mathcal{B}$. □

Bem.: in 5.21 sind die Inklusionen "$\supseteq$" i.a. nicht gegeben.

5.22. **Satz:** Sei $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \ni a$ isoton und n.o. beschränkt.

Dann ist $a \in \mathcal{K}$ und $\lim a_n = \sup\{a_j ; j \in \mathbb{N}\} =: s$.

Bew.: Es ist $a_n \leq s$, und $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$: $s - \varepsilon < a_n \leq a_m$ mit $m \geq n$.

Daraus folgt $|a_m - s| < \varepsilon$ für alle $m \geq n$, d.h. a konvergiert gegen s. □

5.23. **Kor.:** Vor.: $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \ni a$ antiton, n.u. beschr.

Beh.: $a \in \mathcal{K}$ und $\lim a_n = \inf\{a_j ; j \in \mathbb{N}\}$.

1. Bew.: Analog zu Satz 5.22.

2. Bew.: $b = -a$ ist isoton und n.o. beschr. Dann folgt mit Satz 5.22:

$b \in \mathcal{K}$, $\lim b_n = \sup\{-a_j ; j \in \mathbb{N}\} = -\inf\{a_j ; j \in \mathbb{N}\} = -\lim a_n$. □

vgl. Ü

5.24. **Bsp.:** • $a_n := (-1)^n$ divergent

Denn: $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

• $\frac{n-1}{n} \to 1$, denn: $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

5.25. **Bem.:** Das Konvergenzverhalten von $a \in \mathcal{F}$ hängt nicht von endlich vielen Anfangstermen ab. Statt der Indexmenge $\mathbb{N}$ ist auch jedes $\mathbb{Z}_{\geq k}$, $k \in \mathbb{Z}$, zulässig.

5.26. Grenzwertsätze: Vor.: $a, b, c \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in K$, $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$.

Beh.:
(a) $a_n b_n \to \alpha\beta$
(b) $|a_n| \to |\alpha|$
(c) Falls $\beta \neq 0$, so $\exists m_1\ \forall n \geq m_1$: $b_n \neq 0$ und $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{\beta}$.
(c') Falls $\beta \neq 0$, so $\exists m_1\ \forall n \geq m_1$: $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$.
(d) Falls $K = \mathbb{R}$, so $(\forall n: a_n \leq b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta)$.
(d') Falls $K = \mathbb{R}$, so: $(\forall n: a_n < b_n \not\Rightarrow \alpha < \beta)$.
(e) Falls $K = \mathbb{R}$, so: $(\forall n: a_n \leq c_n \leq b_n,\ \beta = \alpha \Rightarrow c_n \to \alpha)$.
("Sandwichlemma")

Bew.: (a):
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(a_n-\alpha)}_{\in\mathfrak{N}}\ \underbrace{b_n}_{\in\mathfrak{B}}}_{\in \mathfrak{N}} + \underbrace{\alpha \cdot b_n}_{\in\mathfrak{K}}}_{\in\mathfrak{K}} = a_n b_n \longrightarrow 0 + \alpha\beta = \alpha\beta$$

ausführlich aufgeschrieben: Wir schreiben $a_n b_n = (a_n - \alpha)\cdot b_n + \alpha \cdot b_n$.
Da $a_n \to \alpha$, ist $a_n - \alpha \in \mathfrak{N}$ laut 5.15. Da $b_n \to \beta$, ist $b_n \in \mathfrak{B}$ laut 5.21.
Somit ist $(a_n - \alpha)\cdot b_n \in \mathfrak{N}$ laut 5.12 (3). Weiter ist $\alpha \cdot b_n \in \mathfrak{K}$,
und dann auch $\underbrace{(a_n-\alpha)\cdot b_n}_{\in\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{K}} + \underbrace{\alpha\cdot b_n}_{\in\mathfrak{K}} \in \mathfrak{K}$ wegen 5.18 (2) 1.).
Der Grenzwert ist $0 + \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta$.

(b): $\big|\,|a_n| - |\alpha|\,\big| \leq |a_n - \alpha| \to 0$

(c): $\exists n_0\left(\frac{|\beta|}{2}\right)\ \forall n \geq n_0$: $|\beta| - |b_n| \leq \frac{|\beta|}{2} \Rightarrow 0 < \frac{|\beta|}{2} \leq |b_n|$.
$$\Rightarrow \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - b_n}{b_n\beta} = \underbrace{(\beta - b_n)}_{\in\mathfrak{N}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n\beta}}_{\in\mathfrak{B}} \in \mathfrak{N}.$$

(d): $\underbrace{b_n - a_n}_{=:c_n \geq 0} \geq 0 \longrightarrow \beta - \alpha =: \gamma \geq 0$
$\overset{!}{\Rightarrow} \gamma \geq 0$. Sonst: $\gamma < 0$, $\exists m_1\ \forall n \geq m_1$: $c_n \leq \frac{\gamma}{2} < 0$, ↯.

(d'): $b_n = \frac{1}{n} > 0 = a_n = \alpha$
$\downarrow$
$0 = \alpha = \beta$

(e): Sei OE $0 \leq c_n \leq b_n$, $\beta = 0 \overset{5.12(5)}{\Rightarrow} c_n \in \mathfrak{N}$. □

5.27. Bsp.:
$$\frac{6n^3 - 4n + 9}{5n^3 + 10n^2} = \frac{n^3\cdot\left(6 - \frac{4}{n^2} + \frac{9}{n^3}\right)}{n^3\left(5 + \frac{10}{n}\right)} = \frac{6 - \frac{4}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{5 + \frac{10}{n}} \xrightarrow[\text{Grenzwertsätze 5.26}]{n\to\infty} \frac{6 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{6}{5}.$$