Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An6: Teilfolgen, Eigenschaften von Folgen

Stichworte: Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß, Vollständigkeitssatz, bestimmte Divergenz, Häufungswerte, limsup und liminf

---

6.1. Einleitung: Die Untersuchung konvergenter Teilfolgen von u.U. divergenten Folgen führt zum Satz von Bolzano-Weierstraß. Wir erhalten, dass $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ vollständig ist in dem Sinne, dass jede Cauchyfolge konvergiert. Wir diskutieren auch bestimmte Divergenz, den Limes superior und Limes inferior. [Hoff, §3.14/5]

6.2. Bezeichnung: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist streng isoton, falls $\forall k \in \mathbb{N}: \varphi(k) < \varphi(k+1)$.
Falls $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n_k := \varphi(k)$: $n_k < n_{k+1} < n_{k+2} < \dots$ (vgl. 5.17)

6.3. Teilfolge (TF): Seien $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$.
Def.: $b \in \mathcal{F}$ heißt Teilfolge (TF) von a, falls

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ streng isoton mit } b = a \circ \varphi, \text{ d.h. } b_k = a_{\varphi(k)}.$$

$\Rightarrow b(k) = a_{\varphi(k)} = a_{n_k}$.

Bem.: Mit $a \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Kompositionsabbildung $a \circ \varphi(k) = a(\varphi(k))$.

6.4. Bem.: Vor.: $a, b \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, b ist TF von a.
Beh.: $a_n \to \alpha \Rightarrow b_n \to \alpha$.
Bew.: $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$
$\Rightarrow |b_k - \alpha| < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0(\varepsilon)$. □

6.5. Hilfssatz: Vor.: $\alpha, \beta, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Bez.: $c_n := a_n + i b_n$, $\gamma := a + ib$.
Beh.: 1.) $c_n \in \mathcal{B} \Leftrightarrow a_n, b_n \in \mathcal{B}$.
$c_n \in \mathcal{N} \Leftrightarrow a_n, b_n \in \mathcal{N}$.
2.) $c_n \to \gamma \Leftrightarrow a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta$.
3.) $c_n \to \gamma \Leftrightarrow \bar{c}_n \to \bar{\gamma}$.
Bew.: Sei $z \in \mathbb{C}$. 1.) $\Rightarrow \max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$, $|z| = |\bar{z}|$.
2.) $c_n - \gamma \in \mathcal{N}$, $a_n - \alpha \in \mathcal{N}$, $b_n - \beta \in \mathcal{N}$, $\alpha, \beta, \gamma = 0$
3.) Wegen $|z| = |\bar{z}|$. □

6.6. **Bem.:** Jede reellwertige Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

Bew.: $a \in \mathcal{F}$. Es heiße $n \in \mathbb{N}$ Gipfelpunkt von a, falls $\forall m \geq n: a_m < a_n$.

1. Fall: $\exists \infty$ viele Gipfelpunkte: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

$\Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$ antitone TF von a

2. Fall: $\exists n_1', n_2', \dots, n_r'$: $a_{\underbrace{n_r'+1}_{=:n_1}} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \leq \dots$ isotone TF. $\square$

6.7. Satz von Bolzano-Weierstraß (B-W):

Jede $\mathbb{K}$-wertige beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew.: $\mathcal{F} \ni c = a + ib$ beschränkt, $a, b \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

$\Rightarrow a, b$ beschr. $\Rightarrow \exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: a \circ \varphi$ monoton, beschr. $\Rightarrow$ kgt.

$\exists \psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: b \circ \varphi \circ \psi$ monoton, beschr. $\Rightarrow$ kgt.

$\Rightarrow c \circ \varphi \circ \psi$ ist kgt. $\square$

6.8. Hilfssatz: Sei a TF einer Cauchyfolge, $a \in \mathcal{K} \Rightarrow$ CF $\in \mathcal{K}$ mit gleichem Limes.

Bew.: Sei c_n die CF. Dann $\exists n_0(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall n, m \geq n_0: |c_n - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\exists n_k: |c_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, n_k groß, OE $n_k \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

$\Rightarrow |c_n - \alpha| \leq |c_n - c_{n_k}| + |c_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

6.9. Vollständigkeitssatz: $\mathcal{C} = \mathcal{K}$.

Bew.: $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{K}$ schon gezeigt, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ wegen 6.8 und 6.7 (=B-W) $\square$

6.10. Beispiele:

1.) $x_0 := 1$, $x_{n+1} := (1 + x_n)^{-1}$. Induktion zeigt: $x_n > 0$, $x_n < 1$, $x_n \geq \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow |x_{n+k+1} - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{1 + x_{n+k}} - \frac{1}{1 + x_n} \right| = \left| \frac{x_n - x_{n+k}}{(1 + x_{n+k})(1 + x_n)} \right| \leq \frac{4}{9} |x_n - x_{n+k}|$.

$1 + x_{n(+k)} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\overset{\text{VI nach } n}{\Rightarrow} |x_{n+k} - x_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot |x_k - x_0| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow x_n$ ist CF.

$\overset{6.9}{\Rightarrow} \exists a,\ \mathbb{R} \ni a \leftarrow x_n \underset{\substack{5.26 \\ a \neq -1}}{\overset{\text{GW-Sätze}}{\Longrightarrow}} a = \frac{1}{1+a} \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{5}}{2}$

($a > 0$ wegen $x_n > 0$)

Sozusagen: $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}$ "=" $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

2.) $c>0 \Rightarrow \sqrt[n]{c} \to 1$

Bew.: 1. Fall: $c=1$ ✓

2. Fall: $c>1$: Sei $\delta_n := \sqrt[n]{c}-1 > 0$. $\Rightarrow (1+\delta_n)^n \overset{\text{Bernoulli 2.10 (14)}}{\geq} 1 + n\underbrace{\delta_n}_{\to 0} \Rightarrow$ Beh. für alle n

Sonst r. S. unbeschr., ↯ da l. S. $= c$

3. Fall: $0<c<1$: Es ist $\frac{1}{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{\underbrace{\tfrac{1}{c}}_{>1}} \to 1$ (nach 2. Fall) $\Rightarrow \sqrt[n]{c} \to 1$. □

3.) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Bew.: Sei $\delta_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Dann ist $n = (1+\delta_n)^n \overset{2.19}{\geq} 1 + \binom{n}{2}\delta_n^2 \qquad (n \geq 2)$

$\Rightarrow \quad n-1 \geq \frac{n}{2}(n-1)\delta_n^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{n}{2}\underbrace{\delta_n^2}_{\to 0} \Rightarrow$ Beh.

Sonst r. S. unbeschr. ↯ □

6.11. **Bestimmte Divergenz**

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{F}$.

Def.: Bestimmte Divergenz:

$a_n \to \infty :\Leftrightarrow \forall K>0 \ \exists n_0(K) \ \forall n \geq n_0(K): \ a_n \geq K$

$a_n \to -\infty :\Leftrightarrow \forall K>0 \ \exists n_0(K) \ \forall n \geq n_0(K): \ a_n \leq -K$.

6.12. **Bem.:**

0) $a_n \to \infty \Leftrightarrow -a_n \to -\infty$

1) $a_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

1') $a_n \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

2) $0 < a_n,\ a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

2') $0 > a_n,\ a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$

„Stenographie": $\underbrace{\frac{1}{\infty} = 0}_{\text{für 1)}}$, $\underbrace{\frac{1}{-\infty} = 0}_{\text{für 1')}}$, $\underbrace{\frac{1}{0^+} = \infty}_{\text{für 2)}}$, $\underbrace{\frac{1}{0^-} = -\infty}_{\text{für 2')}}$.

6.13. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt: $\gamma \cdot \infty = \infty,\ \gamma > 0 \qquad \gamma\cdot(-\infty) = -\infty,\ \gamma>0$

$\gamma \cdot \infty = -\infty,\ \gamma < 0 \qquad \gamma \cdot (-\infty) = \infty,\ \gamma < 0$

$\infty \cdot \infty = \infty, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$

$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$

$\gamma + \infty = \infty, \quad \gamma + (-\infty) = -\infty$

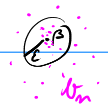
⚠ Diese Aussagen gelten nur für bestimmte Divergenz in den hier angegebenen Versionen!

Beachte z.B.: $0 \cdot \infty$ ist nicht erklärbar, da z.B. $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\cdot\underbrace{n^2}_{\to\infty} = n \to \infty$, $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ gilt.

Häufungswerte von Folgen, lim sup, lim inf:

Haben:

Bolzano-Weierstraß: (a_n) beschr. $\Rightarrow \exists$ TF (b_n) von (a_n) mit $b_n \to \beta$.

$\varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\beta^\varepsilon$: 

β HW von b_n: $\underbrace{\forall N\ \exists n \geq N : b_n \in \mathcal{U}_\beta^\varepsilon}_{\text{„die } b_n \text{ kommen } \beta \text{ beliebig nahe"}}$.

6.14 **Def.**: $\alpha \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert der Folge (a_n), falls: (Kurz: HW)

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

Bem.: $\alpha \in \{\text{HW von } (a_n)\} \Leftrightarrow \exists$ TF (b_n) von (a_n) mit $b_n \to \alpha$.

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei α ein HW, $\varepsilon = \frac{1}{j}$. Dann $|a_{n_j} - \alpha| < \frac{1}{j}$ für ein $n_j \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (b_n) := (a_{n_j})$ ist TF von (a_n) mit $b_n \to \alpha$.

„$\Leftarrow$": Sei (b_n) TF von (a_n) mit $b_n \to \alpha$.

Konvergenz von $b_n \Rightarrow \alpha$ ist HW von (a_n) per Def. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß lässt sich dann umformulieren:

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungswert.

6.15. Der Limes superior: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (a_n) beschränkt.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $b_m := \sup\{a_j ; j \geq m\}$, also $a_m \leq b_m$.

Es gilt: b_m ist antiton, für $m \to m+1$ unmittelbar ersichtlich.

Sei $s := \lim_{m \to \infty} b_m = \inf\{b_m ; m \in \mathbb{N}\} = \inf_m \{\sup_j \{a_j ; j \geq m\}\}$

Def.: $\limsup a_j = \overline{\lim}\, a_j := s = \inf_m \{\sup_j \{a_j ; j \geq m\}\}$

heißt Limes superior von (a_n).

Anschaulich: größter HW

6.16. **Bem.**: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann:

$\alpha = \limsup a_j$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \begin{cases} a_n \leq \alpha + \varepsilon \text{ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen,} \\ \text{und } a_n > \alpha - \varepsilon \text{ für unendlich viele } n. \end{cases}$$

An 6

-5-

<u>Bew.:</u> „$\Leftarrow$": $\bullet\ \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m \geq N: a_m \leq \alpha+\varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon>0: s \leq \alpha+\varepsilon.$

$\Rightarrow s \leq \alpha$ (wegen „$\forall \varepsilon>0$", nach 2.10.(13))

$\bullet\ \forall m\ \exists n \geq m: a_n > \alpha-\varepsilon$

$\Rightarrow b_m > \alpha-\varepsilon$ wegen $a_n \leq b_m$

$\Rightarrow s \geq \alpha-\varepsilon$

$\Rightarrow s \geq \alpha.$

$\bullet$ Aus $s \leq \alpha$ und $s \geq \alpha$ folgt $\alpha = s = \limsup a_j$.

„$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon>0$, $s=\alpha$.

$\bullet\ \forall m: b_m \geq s > s-\varepsilon$

$\Rightarrow \exists n \geq m: a_n > s-\varepsilon$, also 2. Zeile der Beh.

$\bullet$ Da $b_m \to s\ \exists k$ mit $b_k < s+\varepsilon \Rightarrow \forall_n \geq k$ gilt $a_n \leq b_k < s+\varepsilon$, also 1. Zeile. $\square$

6.17. Analog sei der <u>Limes inferior</u> von (a_n) definiert als

$$\liminf a_j = \underline{\lim}\, a_j := \sup_m \{\inf_j \{a_j;\ j \geq m\}\}.$$

6.18. Ist (a_n) nach oben beschränkt und isoton, so ex. $\limsup a_n \in \mathbb{R}$.

Ist (a_n) nach unten beschränkt und antiton, so ex. $\liminf a_n \in \mathbb{R}$.

<u>Vereinbarung</u>:

Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so sei $\limsup a_n = \infty$.

Ist (a_n) nicht nach unten beschränkt, so sei $\liminf a_n = -\infty$.

6.19. <u>Bsp.</u>: 1.) $a_n = (-1)^n$: $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$.

2.) $a_n = n(-1)^n$: $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

6.20. Bew. von Hilfssatz 6.8 ausführlich aufgeschrieben:

Sei (c_n) eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge (c_{n_k}), die gegen α konvergiere. Sei $\varepsilon>0$.

Da (c_n) CF, ex. ein $n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ so, dass $|c_n - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ gilt. ①

Da (c_{n_k}) gegen α kgt., ex. ein k so, dass für alle $l \geq k$ weiter $|c_{n_l} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. ②

Ohne Einschränkung sei $n_k \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ gewählt [sonst wähle n_k größer; (n_k) ist streng isoton].

Dann gilt für alle $n \geq n_k$, dass $|c_n - \alpha| \underset{\uparrow}{\leq} |c_n - c_{n_k}| + |c_{n_k} - \alpha| \underset{①,②}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Δ-Ungl. Dies zeigt, dass (c_n) gegen α konvergiert. $\square$