Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An7: Reihen

Stichworte: Reihen-Konvergenzsätze, Cauchy-Kriterium, alternierende Reihen/Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Wurzel-/Quotienten-Kriterium, Umordnungssatz, Cauchy-Produktsatz [Hoff, §3.2]

7.1. Einleitung: Reihen sind spezielle Folgen, die aus einer "Summanden"folge gebildet werden. Wir behandeln verschiedene Kriterien zu ihrer Konvergenz. Der Cauchy-Produktsatz besagt, wie das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen gebildet wird.

7.2. Sei $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Betr. $\mathcal{F} \xrightarrow{S} \mathcal{F}$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$ ← beginnen bei 0

$$a \longmapsto R_a \text{ mit } R_a(n) := \sum_{j=0}^{n} a_j$$

7.3. Bem.: S ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Isomorphismus.

Bew.: • S ist linear: $R_{(\alpha a+b)}(n) = \sum_{j=0}^{n}(\alpha a_j + b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{n} a_j + \sum_{j=0}^{n} b_j = \alpha R_a(n) + R_b(n)$

• S ist bijektiv: $\exists S^{-1}$, denn $\forall s \in \mathcal{F}\ \exists a \in \mathcal{F}: S(a) = s$,
nämlich $a_0 := s_0$, $n \geq 1: a_n = s_n - s_{n-1}$.

7.4. Def.: $R_a(n)$ heißt n-te Partialsumme (von a). Schreibe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ bzw. $\sum_{j\geq 0} a_j$ statt R_a.
Wir nennen so eine Folge von Partialsummen eine Reihe.

• $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt. (div./best. div.) $:\Longleftrightarrow$ R_a Kgt. (div./best. div.)

• $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \alpha \in \mathbb{K}$, falls $R_a \to \alpha$.

• $k \in \mathbb{Z}$: schreibe $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ mit naheliegender Bedeutung.

7.5. Sei $a, b \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
ergibt: 5.18(1) ⇒ ① Eine Reihe hat höchstens einen GW.
5.18(2) ⇒ ② $\mathcal{R}_a := \{a \in \mathcal{F}: R_a \text{ Kgt.}\}$ ist UVR von $\mathcal{F}$,
$\ell: \mathcal{R}_a \to \mathbb{K}$, $a \mapsto \lim_{n\to\infty} R_a(n)$ ist $\mathbb{K}$-linear.

D.h.: Ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ kgt., so kgt. auch $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + b_j)$,

und $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j$. [→ vgl. mit Def. "lineare Abb." in LA I!]

7.6. Bem.: Satz 5.22 zeigt:

Vor.: $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq 0$.

Beh.: R_a kgt. $\Leftrightarrow$ R_a (n.a) beschr.

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sup\{\sum_{j=0}^{N} a_j ; N \in \mathbb{N}_0\}$.

7.7. Bem.: GWsatz 5.26(d) zeigt:

Vor.: $a_n, b_n \in \mathbb{R}, \forall n : a_n \leq b_n$.

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ kgt. $\Rightarrow$ $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j$.

7.8. Bem.: Bem. 6.4 zeigt:

Vor.: $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ streng isoton, $\varphi(0) = 0$

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ kgt. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_j\right)$ kgt. mit gleichem Limes

Bew.: $\sum_{n=0}^{K}\left(\sum_{j=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_j\right) = \sum_{j=0}^{\varphi(K+1)-1} a_j = R_a(\varphi(K+1)-1)$ ist T.F. von R_a. □

7.9 Bem.: Hilfssatz 6.5 zeigt:

Vor.: $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $c_n := a_n + i b_n \in \mathbb{C}$.

Beh.: 1) $\sum c_j$ kgt. $\Leftrightarrow$ $\sum a_j$, $\sum b_j$ kgt.

2) $\sum c_j$ kgt. $\Rightarrow$ $\sum c_j = \sum a_j + i \sum b_j$

3) $\sum c_j$ kgt. $\Rightarrow$ $\sum \overline{c_j}$ kgt., $\sum \overline{c_j} = \overline{\sum c_j}$

7.10. Der Vollständigkeitssatz 6.9, nämlich $\mathcal{C} = \mathcal{K}$,

zeigt das Cauchy-Kriterium (C.K.):

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ kgt. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}$:

$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j\right| < \varepsilon$.

Bew.: $|R_a(n+p) - R_a(n)| < \varepsilon$. □

7.11. **Folgerung**: Notwendiges Konvergenzkriterium:
$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt. $\Rightarrow$ ($\not\Leftarrow$) $a_j \to 0$. **Bew.**: C.K. für $p=1$.
Nicht hinreichend, denn: harmonische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ div. bestimmt.
$\ulcorner \sum_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$, ↯ zu C.K.
Anders argumentiert: $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{>2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}} + \ldots > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \to \infty \lrcorner$

7.12. **Def.**: $a \in \mathcal{F}$ heißt alternierend, wenn bei $n \to n+1$ ein Vorzeichenwechsel auftritt.
(D.h. wenn $\forall n: a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ist.)

7.13. **Leibnizkriterium**: Vor.: $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n: a_n > 0$, (a_n) antiton, $a_n \to 0$.
Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ Kgt.
Sei α der Limes, dann: $\left|\alpha - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j\right| \leq a_{n+1}$.
Bew.: Sei $s_n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j$.
Dann: 1.) $s_{2m+2} = s_{2m} \underbrace{- a_{2m+1} + a_{2m+2}}_{\leq 0} \leq s_{2m} \Rightarrow s_{2m}$ ist antiton.

$s_{2m} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m} \geq 0$.
Also: $s_{2m} \in \mathcal{B} \Rightarrow s_{2m} \to \alpha$.
2.) $s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \to \alpha - 0 = \alpha$
$s_{2m+1} = s_{2m-1} \underbrace{+ a_{2m} - a_{2m+1}}_{\geq 0} \geq s_{2m-1} \Rightarrow s_{2m+1}$ ist isoton.

$\Rightarrow s_{2m+1} \leq \alpha \leq s_{2m}$.
Somit: $|\alpha - s_{2m+1}| = \alpha - s_{2m+1} \leq s_{2m+2} - s_{2m+1} = a_{2m+2}$,
$|\alpha - s_{2m}| = s_{2m} - \alpha \leq s_{2m} - s_{2m+1} = a_{2m+1}$.
□

7.14. **Bsp.**: $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{1}{j}$ Kgt., aber nicht $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$.
7.15. **Bezeichnung**: R_a heißt absolut Kgt., falls $R_{|a|}$ Kgt.
7.16. **Satz**: $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ Kgt. $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt.
Bew.: C.K.:
$\left|\sum_{j=m+1}^{m+p} a_j\right| \leq \sum_{j=m+1}^{m+p} |a_j| \Rightarrow$ Konvergenz. Sei $m=0$, $p \to \infty$: $\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$. □

7.17 Seien $a, b \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Majorantenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ kgt., fast alle n: $|a_n| \le |b_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ kgt.

Bew.: $R_a(n) = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$ ist eine isotone beschränkte Folge. Jetzt Satz 5.22. □

7.18 **Minorantenkriterium:** $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \infty$, fast alle n: $|a_n| \ge |b_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Bew.: Ann.: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ kgt. $\underset{7.17}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ kgt., ↯ □

7.19 Bsp.: Sei $k \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist (abs.) kgt.

$k=2$: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2}}_{=:S}$ und $S \le \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1.$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \le 2.$ Jetzt 7.6 anwenden.

$k > 2$: $\frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ $\Rightarrow$ Kgz. mit Majorantenkriterium 7.17. □

7.20 **Wurzelkriterium:** Vor.: $\exists\, 0 \le q < 1$, fast alle n: $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ $(*)$.

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist abs. kgt.

Bew.: OE $a_n \ge 0$, $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a_n \le q^n$. Konvergenz durch 7.17 mit $b_n := q^n$. □

Dabei wurde verwendet:

7.21 **Geometrische Reihe:** Sei ~~$-1<q$~~ <1 auch $q \in \mathbb{C}, |q|<1$. Dann: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} q^j \overset{\text{endliche geom. } \Sigma}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \underset{\text{da } q^k \to 0}{=} \frac{1}{1-q}.$

7.22 **Quotientenkriterium:** Vor.: $\exists\, 0 \le q < 1$, fast alle n: $|a_{n+1}| \le |a_n| \cdot q$ $(*)$.

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist abs. kgt.

Bew.: Sei OE $a_n \ge 0$, $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow a_n \le q^n a_0$. M.K. 7.17 mit $b_n := a_0 q^n$ zeigt Kgz. □

7.23 Bsp.: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist abs. kgt.:

Q.K. 7.22: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \underset{\text{(Bernoulli)}}{\le} \frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow$ Q.K. mit $q = \frac{1}{2}$ führt auf Kgz.

An 7

-5-

2) $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ ist abs. Kgt.:

W.K. 7.20: $\sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n^n}} = \frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$ falls $n > 2|z|$.

$\Rightarrow$ W.K. mit $q = \frac{1}{2}$ führt auf Kgz.

3) $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist abs. Kgt. $\forall z \in \mathbb{C}$:

Q.K. 7.22: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2}$, falls n hinreichend groß.

! Wir nennen $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$, die Exponentialfunktion.

7.24 Bem.: All diese Kriterien sind hinreichend, aber nicht notwendig.

Denn: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist Kgt., s. Bsp. 7.19 mit $k=2$ bzw. Bsp. 7.26 mit $\alpha = 2$.

Aber: • Es ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$, d.h. W.K. versagt.

• Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \longrightarrow 1$, d.h. Q.K. versagt.

Ein Kriterium, das hinreichend und notwendig ist, lautet:

7.25 Satz (Cauchysches Verdichtungskriterium):

Vor.: $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0: a_n \geq 0$, (a_n) antiton, $a_n \to 0$. Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Kgt. $\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}}_{\text{"verdichtete Reihe"}}$ Kgt.

Bew. (ausführlich aufgeschrieben): Sei $S_n = R_a(n)$ die n-te Partialsumme von (a_n), und T_k die k-te Partialsumme von $(2^k a_{2^k})$.

„$\Leftarrow$": Für $n \leq 2^k$ gilt $S_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1})$

$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = T_k$. ①

Nach Vor. bei „$\Leftarrow$" ist T_k beschränkt, wegen der Abschätzung ① also auch S_n.

Wegen Bem. 7.6 ist $(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ somit Kgt.

„$\Rightarrow$": Für $n > 2^k$, $k > 0$, gilt: $S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k})$

$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} T_k$. ②

Nach Vor. bei „$\Rightarrow$" ist S_n beschränkt, wegen der Abschätzung ② also auch T_k.

Wegen Bem. 7.6 ist $(T_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ somit Kgt. □

7.26 Bsp.: Sei $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Kgt. $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\alpha \in \mathbb{Q}$: vgl. Bem. in 3.14

Bew.: Laut Cauchy-Verdichtungssatz 7.25 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Kgt. $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}_{\text{geom. } \Sigma}$ Kgt.

• Ist $\alpha > 1$, folgt $2^{\alpha-1} > 1$, mit $q := \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ greift das Q.K. 7.22 $\to$ Kgz.

• Ist $\alpha \leq 1$, folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, laut Minorantenkrit. 7.18 folgt Divergenz. □

7.27 **Umordnungssatz**: Sei $(a_n) \in \mathcal{F}$, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere absolut, $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei bijektiv. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bew.: $\sum_{j=0}^{m} |a_{\varphi(j)}| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \in \mathbb{R}, \ \forall m \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_{\varphi(j)}$ ist abs. kgt.

Zeige jetzt: Die Folge (d_m) mit $d_m := \sum_{j=0}^{m} a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{m} a_j$ ist eine Nullfolge.

Es ist $d_m = \sum_{j=0}^{k_m} \delta_j a_j$ mit $k_m := \max\{m, \varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(m)\}$, mit irgendwelchen $\delta_j \in \{0, 1, -1\}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, m_1 \in \mathbb{N} \ \forall m \geq m_1: \sum_{j=m_1}^{m} |a_j| < \varepsilon$.

Wähle m_0 so, dass $m_0 \geq m_1$ und $\{0, 1, \dots, m_1\} \subseteq \varphi(\{0, 1, \dots, m_0\})$.

Sei $m \geq m_0$.

Dann ist $d_m = \sum_{j=0}^{k_m} \delta_j a_j$ mit $\delta_j = 0$ für $j \leq m_1$.

Daraus folgt:

$$|d_m| = \left|\sum_{j=0}^{k_m} \delta_j a_j\right| = \left|\sum_{j=m_1+1}^{k_m} \delta_j a_j\right| \leq \sum_{j=m_1+1}^{k_m} |\delta_j a_j| \leq \sum_{j=m_1+1}^{k_m} |a_j| < \varepsilon. \quad \square$$

7.28 **Cauchy-Produktsatz**: Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergente Reihen. [Es reicht, dass nur $\sum a_j$ abs. kgt, $\sum b_j$ kgt. (ohne Beweis) [Mertens 1875]]

Es sei $(c_m) \in \mathcal{F}$ die Folge $c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$.

Dann ist die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ (das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$) absolut konvergent, und es gilt: $\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$.

Bew.: • Sei $A := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$, $B := \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \leq \sum_{i=0}^{m} |a_i| \sum_{j=0}^{m} |b_j| \leq A \cdot B.$$

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} c_m$ ist absolut kgt.

• Zeige jetzt: Die Folge (d_m) mit $d_m := \sum_{n=0}^{2m} c_n - \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{m} b_j$ ist eine Nullfolge.

Es ist $d_m = \sum_{n=m+1}^{2m} \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq m+1 \\ \text{oder } j \geq m+1}} a_i b_j = \sum_{i=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-i} a_i b_j + \sum_{j=m+1}^{2m} \sum_{i=0}^{2m-j} a_i b_j$,

wobei $i+j \leq 2m$, d.h. $j \leq 2m-i$, $i \leq 2m-j$.

Daraus folgt: $d_m \leq \underbrace{\sum_{i=m+1}^{2m} |a_i|}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} \cdot B + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{2m} |b_j|}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} \cdot A \xrightarrow{m\to\infty} 0. \quad \square$