Vorlesung Analysis I WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An8: Die Funktionen exp, cos, sin, Teil I

Stichworte: Exponentialreihe, Winkelfunktionen, Eigenschaften, Zahl e, Funktionen sin/cos, Additionstheoreme [Hoff, §3.3.2, S. 134-6]

8.1. Einleitung: Wir tragen die wichtigsten Eigenschaften der (komplexen) Exponentialfunktion zusammen. Die Funktionen, die als Real- und Imaginärteil davon erklärt werden, sind die Winkelfunktionen Cosinus und Sinus. Sie gelten als Prototyp für die Beschreibung von Schwingungen und haben etliche Eigenschaften, z.B. die Additionstheoreme.

8.2. Bem.: Für alle $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ absolut. ⌜Bsp. 7.23.3)⌟

8.3. Def.: Die Exponentialfunktion $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist die Funktion $\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

8.4. Eigenschaften der Exponentialfunktion:

(1) $\exp(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$. (2) $\exp(0)=1$.

(3) $\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$ "Funktionalgleichung von exp"

Bew.: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!}$

$\overset{7.28}{=}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z_2^\ell}{\ell!}\right)$. □

Insbesondere gilt:

(4) $\exp(z)\cdot\exp(-z)=\exp(0)=1$ und $\exp(z)\neq 0\ \forall z\in\mathbb{C}$.

(5) $\exp(x)\geq 1\ \forall x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\exp(x)>1\ \forall x\in\mathbb{R}_{>0}$.

$0<\exp(x)\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}_{\leq 0}$. ⌜$\exp(x)=\frac{1}{\exp(-x)}$⌟

(6) $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y\Rightarrow\exp(x)<\exp(y)$.

Bew.: $\exp(y)=\exp(x+(y-x))=\underbrace{\exp(x)}_{>0}\cdot\underbrace{\exp(\underbrace{y-x}_{>0})}_{>1}>\exp(x)$. □

(7) Formel von de Moivre: $\exp^n(z)=\exp(nz)$.

⌜$\underset{\sim}{n=0}$ ✓, $\underset{\sim}{n\to n+1}$: $\exp^{n+1}(z)=\exp(nz)\exp(z)\underset{(3)}{=}\exp((n+1)z)$ ✓⌟

8.5. Reihenrestabschätzung für exp:

$$\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<n+2:\quad \left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \le \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|z|}.$$

Bew.:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{|z|}{n+2}+\frac{|z|^2}{(n+2)(n+3)}+\dots\right)$$

$$\le \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{|z|}{n+2}+\frac{|z|^2}{(n+2)^2}+\frac{|z|^3}{(n+2)^3}+\dots\right)$$

$$\overset{\text{geom.}\Sigma}{=} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|z|}{n+2}} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|z|}. \qquad \square$$

8.6. Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion:

(1) $|\exp(z)-1|<2|z|$ für $|z|<1$.

Bew.: 8.5 für $n=0$: $|\exp(z)-1|\le\frac{2|z|}{2-|z|}<2|z|$. $\square$

(2) $|\exp(z)-1-z|\le\frac{3}{4}|z|^2$ für $|z|\le 1$.

Bew.: 8.5 für $n=1$: $|\exp(z)-1-z|\le\frac{|z|^2}{2}\cdot\frac{3}{3-|z|}\le\frac{3}{4}|z|^2$. $\square$

(3) $|\exp(z)-\exp(z_1)|\le 2|\exp(z_1)|\cdot|z-z_1|$ für $|z-z_1|<1$.

Bew.: $|\exp(z)-\exp(z_1)| = |\exp(z_1+(z-z_1))-\exp(z_1)|$

$= |\exp(z_1)\cdot\exp(z-z_1)-\exp(z_1)| = |\exp(z_1)\cdot(\exp(z-z_1)-1)|$

$\underset{(1)}{\le} |\exp(z_1)|\cdot 2\cdot(z-z_1| = 2|\exp(z_1)|\cdot|z-z_1|$ für $|z-z_1|<1$. $\square$

(4) Insbesondere: Ist $\varepsilon>0$, so gibt es ein $\delta(\varepsilon):=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2|\exp(z_1)|}\right)$ mit:

$|z-z_1|<\delta \Rightarrow |\exp(z)-\exp(z_1)|<\varepsilon$.

(5) $\exp(\bar z)=\overline{\exp(z)}$.

8.7. Beh.: Für $e:=\exp(1)$ gilt: $2.7<e<2.72$.

Benutze 8.5: $\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\le\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|z|}$ für $|z|<n+2$.

Mit $n=4$, $z=1$:

$$\Big|e-\underbrace{\sum_{k=0}^{4}\frac{z^k}{k!}}_{2.708\overline{3}}\Big|<\frac{1}{5!}\cdot\frac{6}{5}=0.01 \quad\Rightarrow\quad 2.7<e<2.72.$$

8.8. Def.: e heißt Eulersche Zahl.

An 8
-3-

8.9. e ist nicht rational: $e \notin \mathbb{Q}$.

Ann.: $e \in \mathbb{Q}$, d.h. $e = \frac{p}{q}$ mit $p,q \in \mathbb{N}_{>0}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < e = \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{q+2}{q+1} \overset{!}{<} \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q},$$

da $q^2 + 2q < q^2 + 2q + 1 \Leftrightarrow q(q+2) < (q+1)^2 \Leftrightarrow \frac{q+2}{(q+1)^2} < \frac{1}{q}$.

Multiplikation mit $q!$: $\quad n := q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{N}} < n + \frac{1}{q} \leq n+1$, $\lightning$ □

Bem.: e ist transzendent, d.h. es gibt keine Gleichung

$$e^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^k = 0$$ mit rationalen Koeffizienten a_k.

(1873, Charles Hermite)

8.10. $|\exp(ix)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bew.: $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix})$

$= \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1$. □

8.11. Bem.: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$ [mit Q.K. 7.22, wie in 7.23.3)]

8.12. Def.: Die Funktionen sin und cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (Sinus und Cosinus) sind definiert durch

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Sie heißen Winkelfunktionen.

8.13. Eigenschaften von sin und cos:

(1) sin ist eine ungerade Funktion, d.h. $\sin(-z) = -\sin(z)$,
cos ist eine gerade Funktion, d.h. $\cos(-z) = \cos(z)$.

(2) $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$.

(3) $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

Bew.: $i^{2n} = (-1)^n$, $\quad i^{2n+1} = (-1)^n i$.

$$\rightsquigarrow \exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(z) + i \sin(z).$$ □

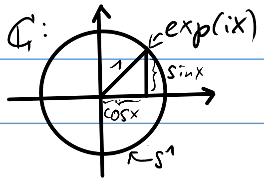
(4) Für $x\in\mathbb{R}$ gilt: $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix))$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix))$.

(5) $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz)+\exp(-iz))$, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz)-\exp(-iz))$.

⌜wegen $\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$, $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.⌟

(6) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

Bew.: $(\cos(z) - i\sin(z))\cdot(\cos(z)+i\sin(z)) = \exp(-iz)\exp(iz) = 1$. □



Für $x\in\mathbb{R}$ ist $(\cos(x), \sin(x)) \in S^1 := \{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2;\ \xi^2+\eta^2=1\}$.

8.14. Additionstheoreme: Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2).$$

Bew. (ausführlich aufgeschrieben):

$$\begin{aligned}
2\cos(z_1+z_2) &= \exp(i(z_1+z_2)) + \exp(-i(z_1+z_2)) && \text{wegen } 8.13(5)\\
&= \exp(iz_1)\exp(iz_2) + \exp(-iz_1)\exp(-iz_2)) && \text{wegen } 8.4(3)\\
&= (\cos(z_1)+i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)+i\sin(z_2))\\
&\quad + (\cos(z_1)-i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)-i\sin(z_2)) && \text{wegen } 8.13(3)\\
&= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \quad \underbrace{+ i\sin(z_1)\cos(z_2) + i\cos(z_1)\sin(z_2)}\\
&\quad + \cos(z_1)\cos(z_2) + \underbrace{i^2}_{=-1}\sin(z_1)\sin(z_2) \quad \underbrace{- i\sin(z_1)\cos(z_2) - i\cos(z_1)\sin(z_2)}_{=0}\\
&= 2\cos(z_1)\cos(z_2) - 2\sin(z_1)\sin(z_2).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
2i\sin(z_1+z_2) &= \exp(i(z_1+z_2)) - \exp(-i(z_1+z_2)) && \text{wegen } 8.13(5)\\
&= \exp(iz_1)\exp(iz_2) - \exp(-iz_1)\exp(-iz_2)) && \text{wegen } 8.4(3)\\
&= (\cos(z_1)+i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)+i\sin(z_2))\\
&\quad - (\cos(z_1)-i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)-i\sin(z_2)) && \text{wegen } 8.13(3)\\
&= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \quad + i\sin(z_1)\cos(z_2) + i\cos(z_1)\sin(z_2)\\
&\quad \underbrace{- \cos(z_1)\cos(z_2) - \underbrace{i^2}_{=+1}\sin(z_1)\sin(z_2)}_{=0} \quad + i\sin(z_1)\cos(z_2) + i\cos(z_1)\sin(z_2)\\
&= 2i\sin(z_1)\cos(z_2) + 2i\cos(z_1)\sin(z_2). \quad □
\end{aligned}$$

8.15. Bem.: Weitere Eigenschaften von exp/sin/cos erfahren wir später in An 10 / An 14.